

การคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$ ด้วยดีเทอร์มิแนนต์ของ เมทริกซ์ขนาด  $2 \times 2$ Computing the Value of Determinant of an  $n \times n$  Matrixwith the  $2 \times 2$  Matrix Determinants

ธชา รัตนศีล

Ruechaa Rattanaseen

กองวิชาคณิตศาสตร์ ฝายศึกษา โรงเรียนนายเรือ

Department of Mathematics, Academic Branch, Royal Thai Naval Academy

ruechaa@gmail.com

Received : July 17, 2020

Revised : September 20, 2020

Accepted : October 8, 2020

## บทคัดย่อ

บทความนี้ผู้เขียนต้องการนำเสนอการคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ด้วยวิธีลดรูปของคิโอส (Chio's condensation method) และวิธีลดรูปของดอดจสัน (Dodgson's condensation method) โดยอธิบายการใช้ทฤษฎีทั้งสองด้วยการแสดงวิธีทำในตัวอย่างเดียวกัน ซึ่งวิธีการลดรูปของคิโอส เป็นการลดรูปดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ให้เป็นขนาด  $(n-1) \times (n-1)$  โดยที่สมาชิกของเมทริกซ์แต่ละตัวจะคำนวณได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ย่อยขนาด  $2 \times 2$  สามารถกระทำซ้ำได้เรื่อยไป เมื่อ  $a_{11} \neq 0$  แต่สำหรับวิธีการลดรูปของดอดจสัน เป็นการลดรูปจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ให้เป็นดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $2 \times 2$  และสมาชิกของเมทริกซ์แต่ละตัวมีขนาด  $(n-1) \times (n-1)$  โดยที่ค่าของดีเทอร์มิแนนต์ขนาด  $(n-2) \times (n-2)$  ซึ่งมีสมาชิกเป็น Interior determinant ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ที่พิจารณาไม่เท่ากับศูนย์ ทั้งนี้ทฤษฎีทั้งสองจะเป็นอีกวิธีการ/มุมมอง ของการแก้ปัญหาเดิมด้วยทฤษฎีที่แตกต่างจากที่เคยศึกษาในห้องเรียน

**คำสำคัญ :** ดีเทอร์มิแนนต์, วิธีการลดรูปของคิโอส, วิธีการลดรูปของดอดจสัน

## Abstract

This paper presents the numerical analysis by using the  $2 \times 2$  matrix determinant to evaluate and compare an  $n \times n$  matrix of two methods: Chio's condensation method and Dodgson's condensation method. The explanation to the identical exercise was applied for the analysis of both methods. In Chio's condensation method, the reduction of the  $n \times n$  matrix determinant into  $(n-1) \times (n-1)$  was derived from each matrix element, established from the determinant of  $2 \times 2$  matrix. The recurring analysis of Chio's condensation method was analyzed until arriving at its determinant value under the condition of  $a_{11} \neq 0$ . In Dodgson's condensation method, the reduction of the  $n \times n$  matrix determinant was derived into the  $2 \times 2$  matrix determinants under the condition that each matrix element equals  $(n-1) \times (n-1)$  matrix. In addition, the value of  $(n-2) \times (n-2)$  determinants by which its Interior determinant of the considering  $n \times n$  matrix is not equal to zero. This presentation of calculating determinants by using two different methods, differently from theories in classrooms, shall provide the insightful understanding of mathematical calculation.

**Keywords :** Determinant, Chio's Condensation Method, Dodgson's Condensation Method

## 1. บทนำ

ทฤษฎีเมทริกซ์ (Matrix theory) เป็นทฤษฎีมูลฐานสำคัญในการศึกษาพีชคณิตเชิงเส้น (Linear algebra) ซึ่งเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่น่าไปใช้ประยุกต์ในหลายศาสตร์ ทั้งทางด้านเศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีด้านต่าง ๆ อีกทั้งการพัฒนาทฤษฎีเมทริกซ์ได้นำไปสู่คณิตศาสตร์ในรูปของกลศาสตร์เมทริกซ์ (Matrix mechanics) ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับการอธิบายทฤษฎีของฟิสิกส์ และนำไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาด้านวิศวกรรมศาสตร์

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาดต่าง ๆ ตามที่ได้ศึกษาในชั้นเรียน ซึ่งเป็นที่รู้จักและนิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย คือวิธีการลดรูปโดยการกระจายโคแฟกเตอร์ และหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $3 \times 3$  ด้วยกฎของซาร์รัส (Sarrus's rule) ซึ่งผู้เรียนส่วนมากมักจะรู้จักกันดีในรูปแบบของวิธีลัดด้วยการต่อสองหลักแล้วคูณทแยงบนและล่าง โดยบทความทางวิชาการจำนวนมากได้ให้ความสนใจและศึกษาวิธีการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เรื่อยมา ซึ่งพบว่าวิธีที่เรียนในชั้นเรียนไม่ได้ถูกนำไปเป็นต้นแบบของทฤษฎีสำหรับคิดค้นหาวิธีการใหม่ ๆ แต่กลับเลือกใช้ทฤษฎีที่ถูกคิดค้นโดยคิโอส (Chio : 1853) และดอดจ์สัน (Dodgson : 1866) เพื่อพัฒนาต่อ ซึ่งบทความนี้ผู้เขียนขอเสนอการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  โดยวิธีลดรูปของคิโอส และวิธีลดรูปของดอดจ์สัน ซึ่งอาศัยดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $2 \times 2$  เป็นหลักในการคำนวณ เมื่อเงื่อนไขของการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ในแต่ละทฤษฎีขึ้นอยู่กับสมาชิกของแต่ละเมทริกซ์ที่พิจารณา และเพื่อเป็นอีกทางเลือกหนึ่งสำหรับการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  เนื่องจากผู้เขียนคิดเห็นว่าบทความนี้มีเนื้อหาที่ไม่ยากเกินไปสำหรับผู้อ่านในการทำความเข้าใจ อีกทั้งเป็นการนำเสนอทฤษฎีที่มีคุณค่าจากนักคณิตศาสตร์รุ่นเก่าที่สร้างสรรค์ทฤษฎีที่น่าทึ่ง ไม่ตกไปตามยุคสมัย เนื่องจากนักคณิตศาสตร์รุ่นใหม่จำนวนไม่น้อยที่ยังคงสนใจให้ความสำคัญ

พัฒนาและขยายความจากทฤษฎีทั้งสอง มาเป็นงานวิจัยและบทความทางวิชาการจำนวนมากอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบัน เช่น งานวิจัยของอัมภิกา [1] รวมถึงงานวิจัยของปรารธนาและคณะ [2] ที่ใช้วิธีลดรูปของดอดจ์สันเป็นเครื่องมือหลักในการคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ เพื่อหาวิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวผกผันของเมทริกซ์ไม่เอกฐานขนาด  $3 \times 3$  และขนาด  $4 \times 4$  ตามลำดับ

## 2. วิธีลดรูปของคิโอส (Chio's condensation method)

คือ วิธีการคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ที่ถูกคิดค้นโดยคิโอส [3] ด้วยการลดรูปให้ขนาดดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เท่ากับ  $(n-1) \times (n-1)$  และสมาชิกแต่ละตัวจะได้จากการคำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ย่อยขนาด  $2 \times 2$  กล่าวคือ

$$\text{กำหนดให้ } A = [a_{ij}]_{n \times n} \text{ โดยที่ } a_{pq} \neq 0$$

ถ้า  $B = [b_{ij}]_{(n-1) \times (n-1)}$  เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการลดรูปของเมทริกซ์  $A$  เมื่อ

$$b_{ij} = \begin{cases} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{iq} \\ a_{pj} & a_{pq} \end{vmatrix} & \text{if } 1 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq q-1 \\ \begin{vmatrix} a_{iq} & a_{ij} \\ a_{pq} & a_{pj} \end{vmatrix} & \text{if } 1 \leq i \leq p-1, q+1 \leq j \leq n \\ \begin{vmatrix} a_{pj} & a_{pq} \\ a_{ij} & a_{iq} \end{vmatrix} & \text{if } p+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q-1 \\ \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{pj} \\ a_{iq} & a_{ij} \end{vmatrix} & \text{if } p+1 \leq i \leq n, q+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$\text{แล้ว } \det(A) = \frac{1}{(a_{pq})^{n-2}} \det(B)$$

ต่อมาได้มีการขยายความของทฤษฎีเพิ่มเติม [4] โดยกำหนดให้  $p=1$  และ  $q=1$  นั่นคือ  $a_{11} \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{(a_{11})^{n-2}}$$

ใช้วิธีลดรูปของคิออส เพื่อหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ ด้วยการลดขนาดลงเรื่อยไป จะทำให้ได้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด  $(n-2) \times (n-2)$ ,  $(n-3) \times (n-3)$ , ... จนสามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ได้ตามต้องการ

### 3. วิธีลดรูปของคอดจัสัน (Dodgson's condensation method)

คือ วิธีการคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ที่ถูกคิดค้นโดยคอดจัสัน [5] ด้วยการลดรูปดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ให้มีขนาด  $2 \times 2$  โดยที่สมาชิกแต่ละตัวเป็นดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $(n-1) \times (n-1)$  กล่าวคือ

$$\text{กำหนดให้ } A = [a_{ij}]_{n \times n}$$

$$\text{จะได้ } DC(A_n) = [m_{ij}]_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$\text{โดยที่ } m_{ij} = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i(j+1)} \\ a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} \end{vmatrix}$$

และ  $|B|$  แทนดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $(n-2) \times (n-2)$  ซึ่งมีสมาชิกเป็น Interior determinant ของ  $|A_n|$  เมื่อ  $|B| \neq 0$

โดย ([6], [8]) อธิบายการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ด้วยวิธีลดรูปของคอดจัสัน ดังนี้

กำหนดให้  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  เมื่อ  $1 \leq i \leq n$  และ

$1 \leq j \leq n$  จะได้ว่า

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \det([a_{ij}]_{i \neq k, j \neq l}) & \det([a_{ij}]_{i \neq k, j \neq l'}) \\ \det([a_{ij}]_{i \neq k', j \neq l}) & \det([a_{ij}]_{i \neq k', j \neq l'}) \end{vmatrix}}{\det([a_{ij}]_{i \neq k', k, j \neq l', l})}$$

โดยที่  $k', k, l', l \in \{1, 2, \dots, n\}$  ;  $k' \neq k, l' \neq l$

$$\det([a_{ij}]_{i \neq k', k, j \neq l', l}) \neq 0, \text{ ทุก } a_{ij} \neq 0$$

สำหรับ  $i \neq k', k$  และ  $j \neq l', l$

เมื่อ  $k', k$  แทน แถวแรกและแถวสุดท้ายของเมทริกซ์ตามลำดับ

และ  $l', l$  แทน หลักแรกและหลักสุดท้ายของเมทริกซ์ตามลำดับ

พิจารณาใช้วิธีลดรูปของคอดจัสันซ้ำในแต่ละสมาชิกของเมทริกซ์เรื่อยไป จนสามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ได้ตามต้องการ

### 4. การคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

เพื่อให้สามารถเข้าใจในทฤษฎีได้โดยง่าย ผู้เขียนจึงขอใช้ตัวอย่างการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $5 \times 5$  สำหรับการอธิบายตามขั้นตอนวิธีลดรูปของคิออส และวิธีลดรูปของคอดจัสัน ดังนี้

ตัวอย่าง กำหนดเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ จงหา } \det(A) \text{ [7]}$$

4.1 ด้วยวิธีลดรูปของคิออส (Chio's condensation method) เมื่อ  $a_{11} \neq 0$

$$\det(A) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{(1)^{5-2}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{(1)^{4-2}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{(1)^{4-2}} = \frac{\begin{vmatrix} -20 & -4 & 2 \\ -20 & -11 & -2 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{(-20)^{3-2}} = \frac{1}{-20} \begin{vmatrix} -20 & -4 & 2 \\ -20 & -11 & -2 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{-20} \begin{vmatrix} 140 & 80 \\ 68 & 6 \end{vmatrix} = \frac{-4,600}{-20}$$

ดังนั้น  $\det(A) = 230$

4.2 ด้วยวิธีลดรูปของคอดจัสสัน (Dodgson's condensation method) เมื่อ  $\det \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{\substack{i \neq k', k \\ j \neq l', l}} \neq 0$ ,

$$\forall a_{ij} \neq 0; i \neq k', k \text{ และ } j \neq l', l$$

$$\det(A) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}$$

เนื่องจากการหาดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีลดรูปของคอดจัสสันต้องมีสมาชิกที่เป็น Interior determinant ของ  $\det(A)$  ไม่เท่ากับศูนย์ จึงใช้การสลับแถวของดีเทอร์มิแนนต์ เพื่อให้สามารถใช้ทฤษฎีได้ตามเงื่อนไข

$$\det(A) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}$$

กำหนดให้

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, |C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

และ

$$|D| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}, |E| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

จะได้

$$\begin{aligned} \det(A) &= - \frac{\begin{vmatrix} |B| & |D| \\ |C| & |E| \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} \\ &= - \frac{5}{\begin{vmatrix} 20 & 0 \\ -14 & 9 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} |B| & |D| \\ |C| & |E| \end{vmatrix} \\ &= - \frac{5}{180} \begin{vmatrix} |B| & |D| \\ |C| & |E| \end{vmatrix} \\ \det(A) &= - \frac{1}{36} \begin{vmatrix} |B| & |D| \\ |C| & |E| \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{พิจารณา } |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-20} \begin{vmatrix} -20 & -88 \\ -40 & -36 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-2,800}{-20} \end{aligned}$$

$$\therefore |B| = 140$$

$$\text{พิจารณา } |C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |C| &= \frac{1}{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -40 & -36 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-16}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore |C| = -4$$

$$\text{พิจารณา } |D| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|D| = - \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \frac{1}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= - \frac{1}{9} \begin{vmatrix} -67 & 9 \\ 36 & 18 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1,530}{-9} \end{aligned}$$

$$\therefore |D| = 170$$

$$\text{พิจารณา } |E| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|E| = - \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|E| = -\frac{1}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 36 & 18 \\ -14 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{576}{-9}$$

$$\therefore |E| = -64$$

เนื่องจาก  $\det(A) = -\frac{1}{36} \begin{vmatrix} |B| & |D| \\ |C| & |E| \end{vmatrix}$

นั่นคือ  $\det(A) = -\frac{1}{36} \begin{vmatrix} 140 & 170 \\ -4 & -64 \end{vmatrix}$

$$= \frac{-8,280}{-36}$$

ดังนั้น  $\det(A) = 230$

## 5. บทสรุป

นอกจากวิธีหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ตามที่ได้ศึกษาในชั้นเรียนแล้ว ผู้เขียนได้นำเสนออีกทางเลือกในการคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  โดยวิธีลดรูปของคิออส (Chio's condensation method) เป็นการลดรูปดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ให้มีขนาด  $(n-1) \times (n-1)$  โดยที่สมาชิกในดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์แต่ละตัวได้จากการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ย่อยขนาด  $2 \times 2$  สามารถกระทำซ้ำได้เรื่อยไปบนเงื่อนไขที่ว่า  $a_{11} \neq 0$  สำหรับวิธีลดรูปของดอดจสัน (Dodgson's condensation method) เป็นการลดรูปจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ให้เป็นดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด  $2 \times 2$  โดยที่สมาชิกในดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์แต่ละตัวมีขนาด  $(n-1) \times (n-1)$  สามารถกระทำซ้ำได้เรื่อยไปบนเงื่อนไขสองประการ คือ  $\det \left( [a_{ij}]_{\substack{i \neq k',k \\ j \neq l',l}} \right) \neq 0$  และ  $\forall a_{ij} \neq 0$  เมื่อ  $i \neq k',k ; j \neq l',l$  เนื่องจากการลดรูปในแต่ละ

ทฤษฎีมีเงื่อนไขการใช้ที่แตกต่างกัน ซึ่งต้องพิจารณาความเหมาะสมจากสมาชิกในเมทริกซ์เป็นสำคัญ ทั้งนี้อาจต้องใช้คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ร่วมด้วยในการคำนวณ เช่น การสลับแถวหรือการสลับหลักของดีเทอร์มิแนนต์ เพื่อให้สามารถใช้ทฤษฎีการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ด้วยการลดรูปของคิออส และดอดจสัน จนได้ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ตามที่ต้องการ

แม้ว่าการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้นำเสนอในบทความนี้ ทั้งสองทฤษฎีจะสามารถหาค่าได้เช่นเดียวกันกับทฤษฎีที่เคยศึกษาในห้องเรียน การนำเสนอด้วยทฤษฎีอื่นที่แตกต่าง จะช่วยให้ผู้อ่านได้มีมุมมองที่หลากหลาย ทั้งนี้จำเป็นต้องพิจารณาเลือกวิธีการในการแก้ปัญหาที่เหมาะสม ซึ่งขึ้นอยู่กับเงื่อนไขที่จะนำไปใช้ แล้วจึงคิดวิเคราะห์แก้ปัญหาอย่างมีเหตุผลและรอบคอบต่อไป

## 6. เอกสารอ้างอิง

- [1] อัมภิกา บุญมี. (2562). วิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวผกผันของเมทริกซ์ไม่เอกฐานขนาด  $3 \times 3$ . *วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี*, 21(2): 198-203.
- [2] P.Surattana, K.Thounthong & A.Boonmee. (2018). Using Extension and Dodgson's Condensation Method for Compute the Inverse of Some Non-Singular Matrices of  $4 \times 4$  Order. *Proceedings of the 23<sup>rd</sup> Annual Meeting in Mathematics*(88-95).
- [3] F. Chió. (1853). *Mémoire sur les fonctions connues sous le nom de resultants ou de determinants*. Turin: E. Pons.
- [4] H. Eves. (1996). *Chio's Expansion in Elementary Matrix Theory*. New York: Dover.
- [5] C. Dodgson. (1866). Condensation of Determinants being a new and brief method for computing their arithmetic values. *Proceeding of the Royal Society of London*(150-155).

- [6] Francine F. Abeles. (2008). Dodgson condensation: The historical and mathematical development of an experimental method. *Linear algebra and its applications*, 429: 429-438.
- [7] Armend Salihu. (2012). New method to calculate determinants of  $n \times n$  ( $n \geq 3$ ) matrix by reducing determinants to 2nd order. *International Journal of Algebra*, 19(6): 913-317.
- [8] M. Bayat & H. Teimoori. (2018). A new method for computing determinants by reducing the orders by two. *Caspian Journal of Mathematical Sciences*, 7(1): 16-24.