

การคำนวณชั้นซิดผิวแบบลามินาร์บนผิวแพนอากาศ
Laminar Boundary Layer Calculation over Airfoil Surface

^{1*}สุภาพ เพ็งมาก และ ^{2#}ไชยบูรณ์ สุขประเสริฐ

¹ภาควิชาวิศวกรรมอากาศยาน กองวิศวกรรมอากาศยานและการบิน
 กองการศึกษา โรงเรียนนายเรืออากาศนวมินทกษัตริยาธิราช
 ²กรมช่างอากาศ

^{1*}Supap Perngmark and ^{2#}Chaiyaboon Sookprasert

¹Aeronautical Engineering Department, Aeronautical Engineering and Aviation Technology Division,
 Faculty of Academic, Navaminda Kasatriyadhiraj Royal Air Force Academy

²Directorate of Aeronautical Engineering

*Supap_Perng@rtaf.mi.th, #Laplace1926@gmail.com

Received : March, 31 2021

Revised : May, 03 2021

Accepted : June, 22 2021

บทคัดย่อ

การประเมินคุณลักษณะเฉพาะทางอากาศพลศาสตร์ของแพนอากาศกระทำได้โดยในขั้นต้นจะใช้วิธีตาข่ายแบบสองมิติแต่ทว่าผลลัพธ์ที่ได้ยังมีค่าความผิดพลาดอยู่มาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งผลที่ได้ในย่านมุมปะทะค่าสูง ทั้งนี้มีสาเหตุเพราะวิธีตาข่ายแบบสองมิติจะพิจารณาให้การไหลเป็นแบบไร้ความหนืด ซึ่งต่างกับการไหลแท้จริงที่เป็นแบบหนืด ดังนั้น เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ดีขึ้นการประเมินคุณลักษณะเฉพาะทางอากาศพลศาสตร์ของแพนอากาศจึงต้องคำนึงถึงผลจากความหนืดด้วย วิธี ๆ หนึ่งที่ใช้กับงานนี้ได้คือการประยุกต์ใช้สมการชั้นซิดผิว ในบทความนี้จะประยุกต์ใช้สมการชั้นซิดผิวช่วยประมาณค่าตัวแปรภายในชั้นซิดผิวแบบลามินาร์ซึ่งเป็นชั้นซิดผิวชั้นแรกสุดของการไหลชนิดไร้การอัดตัวบนผิวแพนอากาศ ที่เริ่มต้นจากจุดขงักงันไปจนถึงจุดเปลี่ยนผ่าน ในอันดับแรก การหาผลเฉลยของสมการชั้นซิดผิวจะใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องชนิดที่ขึ้นอยู่กับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง สร้างระบบสมการกึ่งเชิงเส้นเพื่อหาค่าโปรไฟล์ความเร็วภายในชั้นซิดผิวเสร็จแล้วจึงหาค่าตัวแปรค่าต่างๆ เช่น ความหนาระยะกระจัด ค่าปัจจัยรูปร่าง ความหนาโมเมนต์ และสัมประสิทธิ์ความหนืดที่ผิวโดยกำหนดให้การไหลมีเลขเรย์โนลด์ต่ำ ไหลผ่านแพนอากาศ NACA 0012 และใช้การกระจายความเร็วที่ขอบชั้นซิดผิวที่ได้จากวิธีตาข่ายสองมิติ เมื่อทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับค่าๆเดียวกันที่ได้จากเอกสารอ้างอิงพบว่าเป็นไปในทิศทางเดียวกัน โดยมีความแตกต่างกันไม่มากนัก

คำสำคัญ: ชั้นซิดผิวแบบลามินาร์, วิธีตาข่ายสองมิติ, วิธีผลต่างสืบเนื่อง, การไหลมีเลขเรย์โนลด์ต่ำ

Abstract

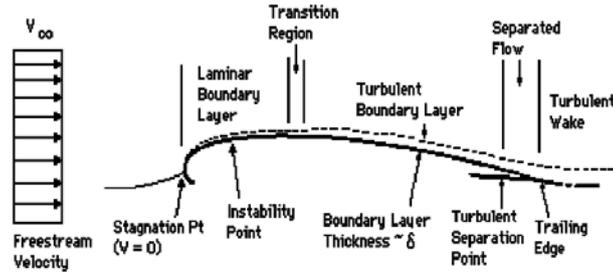
In the initial stage, the 2 dimensional panel method will be used to determine aerodynamic characteristics of an airfoil. But its results still have a lot of errors, especially the results in high angle of attack region. The significant cause of these errors is that the 2 dimensional panel method considers its incoming flow is inviscid which is different from the real viscous flow. Therefore, in order to obtain better results, the determination of aerodynamic characteristics of an airfoil must take the effects of viscosity into attention. One method can deal with this is to apply the boundary-layer equations. In this research the boundary-layer equations will be used to approximate variables within laminar boundary layer which is the first boundary layer of inviscid flow over an airfoil starting from airfoil stagnation point till its transition point. At first, solutions of boundary-layer equations are obtained by using finite different method based on second order partial differential equations to construct system of quasi-linear equations and to solve for boundary-layer velocity profiles. Then, boundary-layer variables such as displacement thickness, momentum thickness, form factor, and skin-friction coefficient will be determined with the following assumptions: the flow has low Reynolds number passing over NACA 0012 airfoil and using the velocity distributions at the edge of its boundary layer obtained from the 2 dimensional panel method. The obtained results will be compared with the results of the same types obtained from the references and find that they are consistent with each other and have low differences.

Keywords: Laminar boundary layer, 2D panel method, Low Reynolds-number flow

1. บทนำ

สถานการณ์หรือปัญหาทางอากาศพลศาสตร์ใด ๆ จะได้รับการเขียนขึ้นเป็นสมการนาเวียร์-สโตคส์แต่การแก้สมการนาเวียร์-สโตคส์เป็นสิ่งที่ทำได้ยากมากและโดยปกติแล้วจะไม่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้เลยจึงจำเป็นต้องใช้วิธีเชิงตัวเลขเข้าช่วย แต่กระนั้นสิ่งนี้ก็ยังเป็นเรื่องที่ยุ่งยากอยู่มากเช่นเคย อย่างไรก็ตามวิธีที่ง่ายกว่าหรือสมมติฐานที่เกี่ยวข้องกับแต่ละปัญหาทำให้เราสามารถแปลงสมการนาเวียร์-สโตคส์ให้กลายเป็นสมการที่ง่ายขึ้นได้ ในบทความนี้สมการที่แปลงแล้วคือสมการชั้นซิคผิว [1]

พิจารณาการไหลผ่านแพนอากาศพบว่าโดยส่วนใหญ่แล้วชั้นซิคผิวเริ่มเติบโตจากจุดขังกันและหนาขึ้นเรื่อย ๆ ตามระยะทางบนผิวแพนอากาศ ในช่วงต้นที่บริเวณด้านหน้าของแพนอากาศ ชั้นซิคผิวเป็นแบบลามินาร์และเป็นเช่นนี้ไปจนกระทั่งถึงจุดเปลี่ยนผ่าน บริเวณการเปลี่ยนผ่านจะมีระยะทางไม่มาก หลังจากนั้นชั้นซิคผิวจะกลายเป็นแบบเทอร์บูเลนต์และดำเนินต่อไปจนถึงขอบหลังของแพนอากาศ ต่อจากนั้นจะเข้าสู่ย่านการไหลแบบอลวน(wake flow region)



รูปที่ 1 การไหลผ่านผิวบนของแพนอากาศ

(ดูรูปที่ 1) ในบทความนี้จะพิจารณาแต่เฉพาะชั้นซิดผิวเป็นแบบลามินาร์และทำนายจุดเริ่มต้นการเปลี่ยนผ่านแบบธรรมชาติเพียงเท่านั้น นอกจากนี้เรายังสามารถกล่าวได้ว่าการวิเคราะห์การไหลในชั้นซิดผิวแบบลามินาร์เป็นสิ่งที่ต้องดำเนินการก่อนเพื่อให้สามารถทำการวิเคราะห์การไหลในชั้นซิดผิวแบบเทอร์บูลენტและในย่านการไหลแบบอลวนต่อไปได้

เป็นที่ทราบกันดีว่าค่าแรงยกและแรงต้านของแพนอากาศที่ซึ่งการไหลบนผิวเป็นแบบลามินาร์โดยตลอดหรือเป็นบริเวณกว้างๆจะมีค่าสูงกว่าค่าแรงยกและแรงต้านของแพนอากาศที่ซึ่งการไหลบนผิวเป็นแบบลามินาร์ที่เป็นบริเวณที่แคบกว่า ด้วยเหตุนี้การค้นหาย่านหรือบริเวณการไหลแบบลามินาร์บนผิวแพนอากาศที่วัดจากจุดซังกัน ไปจนถึงจุดเปลี่ยนผ่านจึงมีทั้งความสำคัญและเป็นประโยชน์สำหรับการเปรียบเทียบค่าทางอากาศพลศาสตร์ของแพนอากาศ

ตัวอย่างของแพนอากาศที่มีการไหลบนผิวแบบลามินาร์และอยู่ในการไหลที่มีเลขเรย์โนลด์ต่ำมีดังเช่นแพนอากาศของอากาศยานไร้คนบินขนาดเล็กและแพนอากาศของกังหันลมผลิตไฟฟ้าเป็นต้น ด้วยสิ่งนี้ผู้วิจัยจึงกล่าวได้ว่างานวิจัยนี้จะเป็นประโยชน์และใช้เป็นรากฐานต่อการวิเคราะห์และออกแบบแพนอากาศของอากาศยานไร้คนขับขนาดเล็กและแพนอากาศของกังหันลมผลิตไฟฟ้า(wind turbine) รวมทั้งแพนอากาศของใบพัด(propeller) ได้ต่อไป

2. ทฤษฎี

2.1 สมการพื้นฐาน

สำหรับการไหลสองมิติแบบไร้การอัดตัวนั้น ความเร็วในทิศทาง x และ y (คือ u และ v ตามลำดับ) ต้องทำให้สมการความต่อเนื่องเป็นจริงทั่วทั้งสนามการไหล [1,2,4] นั่นคือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, u = u(x, y), v = v(x, y) \tag{1}$$

ภายในชั้นซิดผิวที่อยู่ใกล้ซิดกับพื้นผิวนั้นสมการโมเมนตัมในทิศทางตามพื้นผิวคือ

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

และสำหรับการไหลแบบลามินาร์จะได้ว่า

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

โดยที่ y คือระยะทางที่วัดจากพื้นผิว x คือระยะทางที่วัดตามความยาวผิว μ คือ ความหนืดพลวัต และ ρ คือ ความหนาแน่นของของไหล ส่วนสมการ โมเมนตัมในทิศตั้งฉากกับผิว ได้แสดงให้เห็นว่า ความดันเกือบเป็นค่าคงที่ตลอดชั้นขีดผิว สิ่งนี้ทำให้สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับความเร็วที่อยู่นอกชั้นขีดผิวได้ด้วยสมการเบอร์นูลลี นั่นคือ

$$p + \frac{1}{2} \rho U_e^2 = \text{const.} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (3)$$

แทน $\frac{dp}{dx}$ ลงในสมการ(2) ได้ว่า

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho U_e \frac{dU_e}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4)$$

เนื่องจากชั้นขีดผิวจะบางมากเมื่อเทียบกับในระดับของการไหลไร้ความหนืดที่อยู่ภายนอก และเนื่องจากการไหลภายในชั้นขีดผิวเป็นการไหลที่เกือบจะขนานกับพื้นผิว ดังนั้น $U_e(x)$ จึงเป็นค่าที่ได้มาจากผลลัพธ์ของการไหลไร้ความหนืดที่ไหลอยู่บนผิวรูปร่าง สิ่งนี้แสดงว่าก่อนการวิเคราะห์ $U_e(x)$ เป็นค่าที่ทราบก่อนแล้วและทำให้ได้เงื่อนไขที่ขอบชั้นขีดผิวว่า

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U_e(x) \quad (5)$$

นอกจากนั้น สมการ(3) และ (4) ยังต้องทำให้เงื่อนไขขอบเขตชนิดไม่ลื่นไถล (Non-Slip Boundary Condition) เป็นจริง กล่าวคือ

$$u(x, y = 0) = v(x, y = 0) = 0 \quad (6)$$

รวมทั้งยังต้องทราบเงื่อนไขเริ่มต้นอีกด้วย นั่นคือ

$$u(x = x_0, y) = u_0(y) \quad (7)$$

2.2 สมการชั้นขีดผิวแบบลามินาร์สำหรับกรณีเฉื่อย ความดันใด ๆ

สมการนี้จะใช้ได้สำหรับกรณีที่มีการกระจายความเร็ว $U_e(x)$ ไม่เป็นไปตามกฎการยกกำลัง [1] และเป็นสมการที่ได้รับการแปลงโดยมีตัวแปรการแปลงคือ

$$\xi = x, \eta = y / \delta(x), u = U_e \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (8)$$

ใช้ตัวแปรการแปลงกับสมการความต่อเนื่อง ได้ว่า

$$\begin{aligned} \delta \dot{U}_e \frac{\partial f}{\partial \eta} + \delta U_e \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} - U_e \dot{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \right) + \frac{\partial v}{\partial \eta} &= 0 \\ \Rightarrow v &= U_e \dot{\delta} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \right) - \delta \dot{U}_e f - \delta U_e \frac{\partial f}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (9)$$

โดยที่ $f = 0$ ที่ $\eta = 0$ แล้วแทน u และ v จากสมการ(8) และ(9) ตามลำดับลงในสมการโมเมนตัม ทำให้ได้ว่า

$$f''' = \frac{\rho U_e \delta}{\mu} \left[\begin{array}{l} \frac{\delta U_e}{\dot{U}_e} (f'^2 - 1 - f \times f'') \\ - \dot{\delta} \times f'' + \delta \left(\begin{array}{l} f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \xi} f'' \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (10)$$

ให้

$$u_n = \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (11)$$

แล้วแทนลงในสมการ(10) จะได้ว่า

$$u_n'' = \frac{\rho U_e \delta}{\mu} \left[\begin{array}{l} \frac{\delta U_e}{\dot{U}_e} (u_n^2 - 1 - f u_n') - \dot{\delta} f u_n' \\ + \delta \left(u_n \frac{\partial u_n}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} u_n' \right) \end{array} \right] \quad (12)$$

เมื่อนิยามให้

$$\delta = \sqrt{\frac{\xi \mu}{\rho U_e}} \Rightarrow \dot{\delta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_e \xi}} \times \left(1 - \frac{\xi \dot{U}_e}{U_e} \right) \quad (13)$$

จะทำให้สมการ(12) กลายเป็น

$$u_n'' = m(u_n^2 - 1) - \frac{m+1}{2} f u_n' + \xi \left(u_n \frac{\partial u_n}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} u_n' \right) \quad (14)$$

โดยที่

$$m = m(\xi) = \frac{\xi \dot{U}_e}{U_e} \quad (15)$$

รวมทั้งทำให้สมการเงื่อนไขเริ่มต้นและสมการเงื่อนไขขอบเขตกลายเป็น

$$\begin{aligned} f = u_n = 0 \quad \text{ที่ } \eta = 0 \\ u_n \rightarrow 1 \quad \text{เมื่อ } \eta \rightarrow \infty \\ u_n = u_{n0} \quad \text{ที่ } \xi = 0 \end{aligned}$$

การประมาณค่า $\frac{\partial u_n}{\partial \xi}$ ในสมการ(14) กระทำโดยใช้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $u_{ni}, i = 1, 2$ รอบ u_n ซึ่งแสดงว่าค่า $\xi_1, \xi_2, u_{n1} = u_n(\xi_1), u_{n2} = u_n(\xi_2)$ เป็นค่าที่ทราบแล้วโดยอยู่ก่อนหน้า ξ และ $u_n(\xi)$ การกระจายที่ได้เป็นดังนี้

$$u_{n1} = u_n + (\xi_1 - \xi) \frac{\partial u_n}{\partial \xi} + \frac{(\xi_1 - \xi)^2}{2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2} \quad (16)$$

$$u_{n2} = u_n + (\xi_2 - \xi) \frac{\partial u_n}{\partial \xi} + \frac{(\xi_2 - \xi)^2}{2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2}$$

แก้สมการทั้งสองเพื่อหา $\frac{\partial u_n}{\partial \xi}$ จะได้

$$\frac{\partial u_n}{\partial \xi} = \frac{1}{\Delta \xi} (\beta u_n(\xi, \eta) - u_{nm})$$

$$\Delta \xi = \xi_1 - \xi_2$$

$$\beta = \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_1 - \xi} - \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_2 - \xi} \quad (17)$$

$$u_{nm} = \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_1 - \xi} u_{n1} - \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_2 - \xi} u_{n2}$$

ทำการแทนผลที่ได้ลงในสมการ(14) พร้อมทั้งใช้การประมาณที่ว่า

$$u_n^2 = (u_s + (u_n - u_s))^2 \approx 2u_n u_s - u_s^2 \quad (18)$$

ร่วมกันแปลงให้สมการ(14) กลายเป็น

$$u_n'' \approx m(2u_n u_s - u_s^2 - 1) - \frac{m+1}{2} f_s u_n' + \frac{\xi}{\Delta\xi} (2\beta u_n u_s - \beta u_s^2 - u_m u_n) - \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} u_n'$$

แล้วจัดให้อยู่ในรูปข้างล่างนี้

$$u_n'' + \left(\frac{m+1}{2} f_s + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) u_n' - [2m u_s + \frac{\xi}{\Delta\xi} (2\beta u_s - u_m)] u_n = -m(u_s^2 + 1) - \frac{\xi}{\Delta\xi} \beta u_s^2 \quad (19)$$

2.3 สมการผลต่างสี่เหลี่ยม

การประมาณค่าอนุพันธ์ที่หนึ่งของ u_n จะใช้สูตรผลต่างกึ่งกลาง (Central Difference Formula) เข้าช่วย กล่าวคือ

$$u_n' \approx \frac{u_{n,i+1} - u_{n,i-1}}{\eta_{n,i+1} - \eta_{n,i-1}} \quad (20)$$

ส่วนการประมาณค่าอนุพันธ์ที่สองของ u_n กระทำด้วยสมการต่อไปนี้

$$u_n'' \approx \frac{2}{\eta_{n,i+1} - \eta_{n,i-1}} \times \left[\frac{u_{n,i+1} - \eta_{n,i}}{\eta_{n,i+1} - \eta_{n,i}} - \frac{u_{n,i} - \eta_{n,i-1}}{\eta_{n,i} - \eta_{n,i-1}} \right] \quad (21)$$

โดยที่

$$u_{n,i} = u_n(\xi, \eta_i) \quad (22)$$

นำสมการอนุพันธ์ที่หนึ่งและที่สองของ u_n แทนลงในสมการ(17) แล้วจัดสมการที่ได้ให้อยู่ในรูปต่อไปนี้

$$A_j U_{n,j-1} + B_j U_j + C_j U_{j+1} = D_j \quad (23)$$

โดยที่

$$A_j = \frac{2}{(h_p + h_m) h_m} - \left(\frac{m+1}{2} F_{s,j} + \xi \frac{\partial F_{s,j}}{\partial \xi} \right) \times \frac{1}{(h_p + h_m)} \quad (24)$$

$$B_j = -\frac{2}{(h_p + h_m)} - 2m U_{sj} - \frac{\xi}{\Delta\xi} (2\beta U_{s,j} - U_{m,j}) \quad (25)$$

$$C_j = \frac{2}{(h_p + h_m) h_p} + 2 \left(\frac{m+1}{2} F_{sj} + \frac{\xi}{\Delta\xi} \frac{\partial F_{s,j}}{\partial \xi} \right) \times \frac{1}{(h_p + h_m)} \quad (26)$$

$$D_j = -m(U_{s,j}^2 + 1) - \frac{\xi}{\Delta\xi} \beta U_{s,j}^2 \quad (27)$$

ซึ่ง

$$\begin{aligned} U_{s,j} &= u_s(\eta_j) (\approx u_n(\xi, \eta_j)) \\ F_{s,j} &= f_s(\eta_j) (\approx f(\eta_j)) \\ U_{m,j} &= u_m(\xi) \end{aligned} \quad (28)$$

การประเมินค่า $F_{s,j}$ เป็นไปดังนี้

$$\begin{aligned} F_{s,1} &= f(\eta_1) = 0 \\ F_{s,j} &= F_{s,j-1} + \int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} U_{s,j} d\eta \end{aligned} \quad (29)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} F_{m,1} &= 0 \\ F_{m,j} &= F_{m,j-1} + \int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} U_{m,j} d\eta \end{aligned} \quad (30)$$

2.4 สมการจากเงื่อนไขขอบเขต

สมการจากเงื่อนไขขอบเขตมีอยู่ 2 สมการดังนี้

1) จากเงื่อนไข $u_n(\eta = 0) = U_{n,1} = 0$ ได้ว่า

$$B_1 U_{n,1} + C_1 U_{n,2} = D_1 \Rightarrow B_1 = 1, C_1 = D_1 = 0 \quad (31)$$

2) จากเงื่อนไข $u_n(\eta \rightarrow \infty) = U_{n,p} = 1$ ได้ว่า

$$A_p U_{n,p-1} + B_p U_{np} = D_p \Rightarrow A_p = 0, B_p = D_p = 1 \quad (32)$$

ซึ่ง p คือจำนวนจุดหรือสถานีบนแกน η โดยที่ p จะต้องมีค่ามากเพียงพอเพื่อให้ $u_n(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow 1$ สิ่งนี้แสดงว่า

$$\eta_j = \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p = \eta_\infty \quad (33)$$

2.5 ระบบสมการ

ในแต่ละสถานี(คือ ξ_i) มีจำนวนสมการทั้งสิ้น p สมการ สมการแรกคือสมการ(29) สมการสุดท้ายคือสมการ (30) สมการที่ 2 ถึง $p-1$ คือสมการ(21) ที่คิดที่ $j = 2, 3, \dots, p-1$ เขียนสมการทั้งหมดในรูปของเมตริกซ์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_2 & B_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{p-1} \\ 0 & \cdots & 0 & A_p & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n,1} \\ U_{n,2} \\ \vdots \\ U_{n,p-1} \\ U_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ D_{p-1} \\ D_p \end{bmatrix} \quad (34)$$

2.6 ค่าตัวแปรที่จุดขงกัน

ค่าตัวแปรที่สำคัญมีดังนี้

1) ความเร็ว: $u_n(\xi = 0) = 0$

2) พารามิเตอร์เกรเดียนท์ความดัน, $m(\xi = 0) = 1$

3) เพื่อการศึกษาการเติบโตของชั้นซิดผิวจะกำหนดว่า $\delta(\xi = 0) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_e L}}$

2.7 จุดเปลี่ยนผ่าน

เป็นที่ทราบกันดีว่า von Ingen and Smith เป็นผู้แนะนำให้รู้จักกับวิธีเอกซ์โพเนนที่กำลังเอ็น (e^N method) ที่เป็นวิธีที่ประสบความสำเร็จโดยตั้งอยู่บนฐานของทฤษฎีเสถียรภาพเชิงเส้น วิธีเอกซ์โพเนนที่กำลังเอ็นนี้ใช้ได้เป็นอย่างดีเพื่อการทำนายการเริ่มเกิดขึ้นของการเปลี่ยนผ่านแบบธรรมชาติสำหรับชั้นซิดผิวแบบสองมิติชนิดไร้การอัดตัว [6,7]

ตัวเลข N เป็นอัตราการขยายสูงสุดที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่งที่กำหนด จุดเริ่มต้นการเปลี่ยนผ่านจากการไหลแบบลามินาร์ไปสู่การไหลแบบเทอร์บูเลนซ์คือจุดที่มีค่า N มากกว่าค่าวิกฤติ, N_{crit} ในบทความนี้จะใช้วิธีของ Drela หาค่า N [5]:

$$N = \frac{dN}{d Re_\theta} (Re_\theta - Re_{\theta,crit}) \quad (35)$$

โดยที่ Re_θ คือเลขเรย์โนลด์ที่ขึ้นกับความหนาโมเมนต์ θ

$$Re_\theta = \frac{\theta U_e}{\nu} \quad (36)$$

ความชัน $\frac{dN}{d Re_\theta}$ มีสมการคือ

$$\frac{dN}{d Re_\theta} = 0.028(H-1) - 0.0345 * e^{-(3.87/(H-1)-2.52)^2} \quad (37)$$

Re_{θ,crit} หาได้จากสมการ

$$\log_{10} Re_{\theta,crit} = 2.492 \left(\frac{1}{H-1} \right)^{0.43} + 0.7 \left(\tanh \left(\frac{14}{H-1} - 9.4 \right) + 1 \right) \quad (38)$$

$N_{crit} = 9$ เป็นค่าที่ใช้สำหรับการไหลที่ค่อนข้างเป็นแบบเทอร์บูลนต์ที่ซึ่งปกติเป็นการไหลในอุโมงค์ลม $N_{crit} > 9$ เป็นค่าที่ควรใช้สำหรับการไหลเข้าที่เป็นแบบลามินาร์อย่างแท้จริงและสำหรับพื้นผิวเรียบและมีการสั้นน้อย[8]

2.8 ตัวแปรในชั้นขีดผิว

1) ความหนาของระยะกระจัด

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U_e(x)}\right) dy \quad (39)$$

2) ความหนาโมเมนต์

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (40)$$

3) ค่าปัจจัยรูปร่าง

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (41)$$

4) สัมประสิทธิ์ความหนืดที่ผิว

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} \quad (42)$$

ซึ่ง

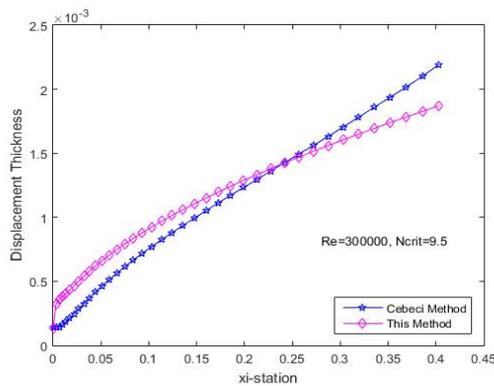
$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (43)$$

3. การดำเนินงานและผลงาน

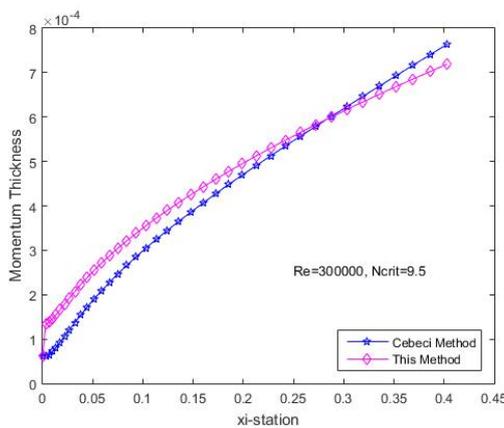
โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาเพื่อใช้คำนวณประกอบด้วยส่วนสำคัญสี่ส่วน คือ ส่วนแรกเป็นวิธีตาข่ายสองมิติ เพื่อการประมาณค่าความเร็วที่ขอบชั้นขีดผิวและจุดขงกั้น ส่วนที่สองเป็นส่วนคำนวณความเร็วภายในชั้นขีดผิว คัดที่แต่ละสถานี ξ_i เมื่อความเร็วที่แต่ละจุดบนแนวแกนตั้งฉาก $u(\eta_j) = u_j$ เข้าสู่ค่าตอแล้วส่วนที่สามจะทำงาน แต่ถ้ายังไม่ลู่เข้าก็ให้ทำซ้ำไปจนครบจำนวนรอบที่กำหนดแล้วจึงยุติการทำงาน เงื่อนไขการลู่เข้าคือ $\max(|u_{j,pre} - u_{j,cur}|) < 0.00001 \forall j, j = 1, 2, \dots, p$ ส่วนที่สามจะคำนวณหาค่าความหนาของระยะกระจัด ความหนาโมเมนต์และค่าปัจจัยรูปร่าง และส่วนที่สี่จะตรวจสอบว่าการเปลี่ยนผ่านเกิดขึ้นที่สถานี ξ_i หรือไม่ โดยใช้เงื่อนไขการตรวจสอบคือ $N > N_{crit}$ ถ้าเงื่อนไขเป็นจริงให้ยุติการทำงาน แต่ถ้าไม่จริง โปรแกรมจะย้อนกลับไปทำส่วนที่สองโดยกระทำกับ(ที่)สถานี ξ_i สถานีถัดไปจนครบทุกสถานีหรือ อาจจะยุติการทำงานก่อนก็ได้ถ้าค่า u_j ไม่ลู่เข้า หรือเกิดการเปลี่ยนผ่าน

ข้อมูลที่ต้องป้อนให้แก่โปรแกรมประกอบด้วย เลขเรย์โนลด์ ($Re = \frac{\rho U_{\infty} L}{\mu}$) มุมปะทะ อัตราการขยายค่าวิกฤติ และ พิกัดของจุดต่าง ๆ บนผิวแพนอากาศที่เริ่มต้นจากผิวด้านล่างของแพนอากาศจากจุดที่ขอบท้ายไปยังจุดที่ขอบหน้า แล้วต่อ ด้วยผิวด้านบนต่อจากจุดที่ขอบหน้าไปยังจุดที่ขอบหลัง

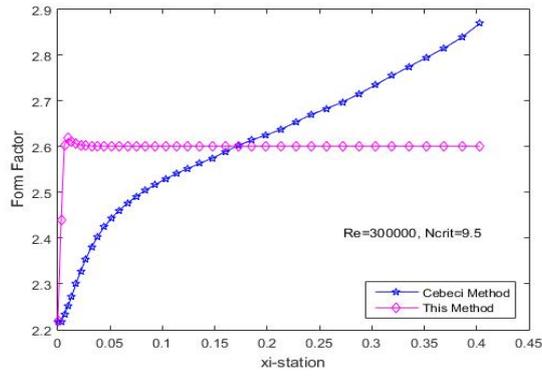
ผลการทำงานเป็นไปดังแสดงไว้ในรูป 2 ถึงรูปที่ 9 เมื่อพิจารณาจากรูปกราฟทั้งหมดพบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการประยุกต์ใช้วิธีในงานวิจัยนี้มีค่าความแตกต่างจากผลลัพธ์จากวิธีที่ใช้ในหนังสืออ้างอิง [3] ไม่มากและค่าต่าง ๆ ที่ได้จะสอดคล้องและเป็นไปในทิศทางเดียวกัน โดยที่ค่าสูงสุดและค่าเฉลี่ยของความแตกต่างสัมบูรณ์ระหว่างผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีทั้งสองสำหรับกรณีของความหนาแน่นระยะกระจัดและกรณีของความหนาโมเมนต์ได้ผลมีค่าไม่เกิน 1 % และสำหรับกรณีของสัมประสิทธิ์ความหนืดที่ผิวได้ผลคือ 6.0043% และ 0.5684% ตามลำดับ แต่สำหรับกรณีของค่าปัจจัยรูปร่างผลที่ได้จากวิธีทั้งสองยังมีความแตกต่างที่เห็นได้เด่นชัดคือ 37.12% และ 13.39% ตามลำดับ (ดูตารางที่ 1) ทั้งนี้เนื่องจากค่าปัจจัยรูปร่างเป็นค่าที่ได้จากการคำนวณ (ดูสมการ(36)) ที่ซึ่งทั้งตัวตั้ง (คือ δ^*) และตัวหาร (คือ θ) มีค่าไม่เท่ากันอยู่แล้ว ผลที่ได้จึงมีความแตกต่างที่เห็นได้เด่นชัด และด้วยเหตุนี้จุดเปลี่ยนผ่านที่ได้จากวิธีทั้งสองจึงแตกต่างกัน เหตุผลสำคัญอีกประการหนึ่งที่ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีทั้งสองมีค่าแตกต่างกันคือวิธีทั้งสองกล่าวทั่วไปแล้วเป็นวิธีเชิงตัวเลขแต่ประยุกต์ใช้วิธีที่แตกต่างกัน โดยที่วิธีในงานวิจัยนี้ใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องชนิดที่ขึ้นอยู่กับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ในขณะที่ [3] ใช้วิธีกล่อง (Box method) ซึ่งก็คือวิธีผลต่างสืบเนื่องชนิดที่ขึ้นอยู่กับระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง



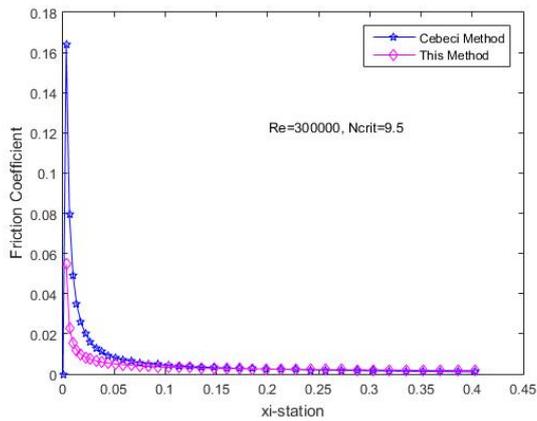
รูปที่ 2 การเติบโตของความหนาแน่นระยะกระจัดของ NACA 0012 เมื่อ $Re=3 \times 10^5$, $N_{crit}=9.5$



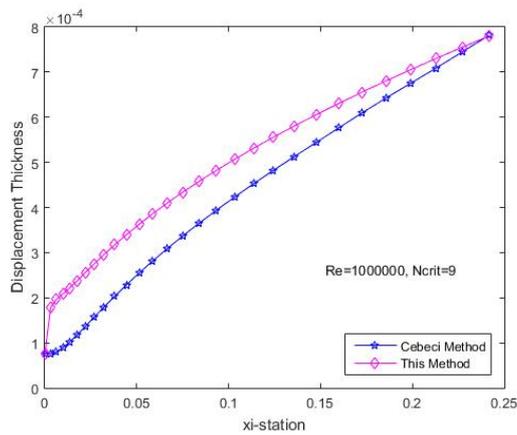
รูปที่ 3 การเติบโตของความหนาโมเมนต์ของ NACA 0012 เมื่อ $Re=3 \times 10^5$, $N_{crit}=9.5$



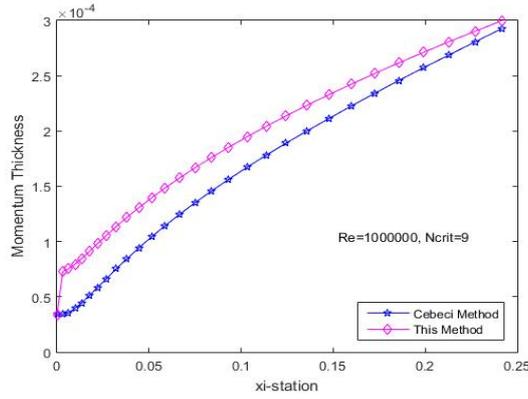
รูปที่ 4 การเติบโตของค่าปัจจัยรูปร่างของ NACA 0012 เมื่อ $Re=3 \times 10^5$, $N_{crit}=9.5$



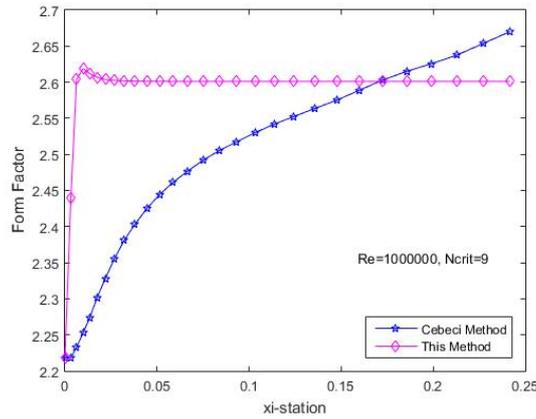
รูปที่ 5 เส้นโค้งสัมประสิทธิ์ความหนืดที่ผิวของ NACA 0012 เมื่อ $Re=3 \times 10^5$, $N_{crit}=9.5$



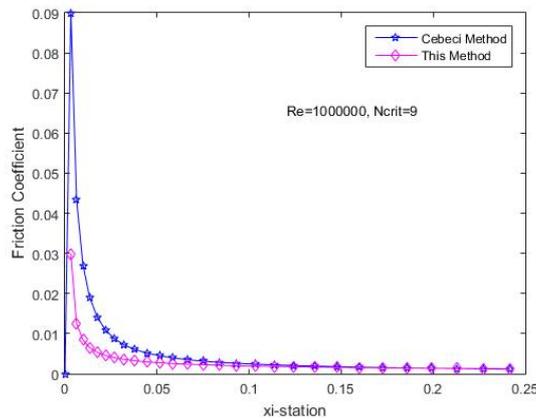
รูปที่ 6 การเติบโตของความหนาระยะกระจัดของ NACA 0012 เมื่อ $Re=1 \times 10^6$, $N_{crit}=9$



รูปที่ 7 การเติบโตของความหนาโมเมนต์ของ NACA 0012 เมื่อ $Re=1 \times 10^6$, $N_{crit}=9$



รูปที่ 8 การเติบโตของค่าปัจจัยรูปร่างของ NACA 0012 เมื่อ $Re=1 \times 10^6$, $N_{crit}=9$



รูปที่ 9 เส้นโค้งสัมประสิทธิ์ความหนืดที่ผิวของ NACA 0012 เมื่อ $Re=1 \times 10^6$, $N_{crit}=9$

ตารางที่ 1: ค่าสูงสุดและค่าเฉลี่ยของความแตกต่างสัมบูรณ์ระหว่างผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีในงานวิจัยนี้ กับจากวิธีที่ใช้ในหนังสืออ้างอิง [3]

	$ \Delta\delta^* $	$ \Delta\theta $	$ \Delta H $	$ \Delta c_f $
ค่าสูงสุด [%]	0.0120	0.0040	37.12	6.0043

ค่าเฉลี่ย [%]	0.0080	0.0028	13.39	0.5684
---------------	--------	--------	-------	--------

4. บทสรุป

สมการชั้นขีดผิวแบบลามินาร์สำหรับเกร็ดเดียนท์ ความดันใดๆ สมการผลต่างสืบเนื่องและระบบสมการ ใ้รับการแสดงให้เห็นที่มอย่างค่อนข้างชัดเจนเพื่อสร้าง โปรแกรมขึ้นมาช่วยคำนวณหาการกระจายความเร็วภายในชั้นขีดผิวแบบลามินาร์และทำการประเมินค่าตัวแปรในชั้นขีดผิวแบบลามินาร์รวมทั้งทำการทำนายจุดเปลี่ยนผ่านด้วย

พิจารณาจากผลลัพธ์สำคัญคือความหนาของระยะกระจัดและสัมประสิทธิ์ความหนืดที่ผิว ซึ่งเป็นค่าที่ต้องใช้ในการวิเคราะห์หาค่าทางอากาศพลศาสตร์ของแพนอากาศที่คำนึงถึงผลของความหนืด พบว่าผลลัพธ์ของตัวแปรทั้งสองที่ได้จากวิธีในงานวิจัยนี้เป็นค่าที่ยอมรับได้เพราะความหนาของระยะกระจัดมีค่าต่างจากค่าที่ได้จาก [3] สูงสุดไม่เกิน 1% ส่วนสัมประสิทธิ์ความหนืดที่ผิวมีค่าต่างจากค่าที่ได้จาก [3] สูงสุดไม่เกิน 6.01% ดังนั้นกล่าวสรุปได้ว่าเราสามารถใช้งานวิจัยนี้เป็นพื้นฐานของงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสมการชั้นขีดผิวแบบเทอร์นูเลนท์ต่อไปได้

5. เอกสารอ้างอิง

- [1] J. Moran, An introduction to theoretical and computational aerodynamics, John Wiley & Sons, Inc.,
- [2] Joseph A. Schetz, Boundary layer analysis, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, Virginia, 2010
- [3] Tuncer Cebeci, Jean Cousteix, Modeling and computation of boundary-layer flows, Second revised and extended edition, Horizons Publishing Inc., Long Beach, , California , 2005
- [4] A.E.P. Veldman, Boundary layers in fluid dynamics Lecture notes in applied mathematics, Academic year 2009-2010, University of Groningen, The Netherland
- [5] H. Ozdemir, A. van Garrel, H.J. Seubers, Unsteady Interacting Boundary Layer Method., American Institute of Aeronautics and Astronautics, Conference Paper, January 2017
- [6] G. J. Walker, P. H. Subroto, M. F. Platzer, Transition modeling effects on viscous/inviscid interaction analysis of low Reynolds number airfoil flows involving laminar separation bubbles, THE American Society of Mechanical Engineers, 1988
- [7] Lelanie Smith, An interactive boundary layer modelling methodology for aerodynamic flows, Department of Mechanical and Aeronautical Engineering , University of Pretoria, November 2011
- [8] V. Storch, On viscous-inviscid interaction for boundary layer calculation using two-equation integral method, URL: <https://stc.cvut.cz/pdf15/5520.pdf>, access on 15/11/2020
- [9] T. Cebeci, E. Besnard, H. H. Chen, An interactive boundary-layer method for multielement airfoils, Computers & Fluids Vol. 27, No 5-6, pp. 651-661, 1998

6. สัญลักษณ์

- C_f	Skin friction coefficient	- $Re_{\theta,crit}$	Critical momentum thickness Reynolds number
- m	Pressure gradient parameter	- U_e	External velocity
- p	Pressure	- δ	Measure of the boundary layer thickness
- x, y	Boundary layer coordinates	- δ^*	Displacement thickness
- u, v	Velocity components	- μ	Dynamic viscosity

- H	Form factor	- ρ	Density
- L	Characteristic length	- τ	Shear stress
- N	Amplitude ratio	- τ_w	Wall shear stress
- N_{crit}	Critical amplitude ratio	- θ	Momentum thickness
- Re	Reynolds number	- ξ, η	Transformation variables
- Re_θ	Momentum thickness Reynolds number	- ν	Kinematic viscosity