

การวัดค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นด้วยลูกตุ้มแท่งกลมที่มีคาบน้อยที่สุด

Local gravity measurement by using the minimized period of rod pendulums

^{1*}สายชล สิทธิพงศ์ และ ^{2#}บัญชา คังตระกูล

^{1*} สาขาวิชาเทคโนโลยียานยนต์ คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่

^{2#} สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่

^{1*} Saichon Sithipong and ^{2#} Bacha Koontragool

^{1*} Department of Automotive Technology, Faculty of Engineering and Technology, North-Chiang Mai University

^{2#} Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering and Technology, North-Chiang Mai University

*saichon@northcm.ac.th, #bacha@northcm.ac.th

Received: January 8, 2024

Revised: July 15, 2024

Accepted: October 10, 2024

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ได้นำเสนอผลลัพธ์ของการหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นโดยใช้ลูกตุ้มแท่งกลมที่มีคาบน้อยที่สุดเป็นมาตรฐานความโน้มถ่วง โดยการศึกษาใช้ลูกตุ้มแท่งกลมที่มีความยาวแตกต่างกันจำนวน 5 แท่ง ทดลอง ณ ตำแหน่งตั้งที่เส้นรุ้ง $18^{\circ}39'43''$ N และอยู่ที่ระดับความสูง 300 m AMSL ผลลัพธ์จากการศึกษานี้แสดงให้เห็นว่า โดยใช้เวลาในการแกว่งของลูกตุ้มจำนวน 100 รอบ โดยใช้มุมเริ่มต้นไม่เกิน 2° จำนวน 12 ซ้ำ จะได้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นจากการทดลองด้วยลูกตุ้มแบบแท่งกลมที่มีคาบน้อยที่สุดเป็น $9.800 \pm 0.008 \text{ m/s}^2$ โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าคำนวณ 9.7847 m/s^2 ประมาณ 0.2 %

คำสำคัญ: การวัดความโน้มถ่วง, มาตรฐานความโน้มถ่วง, ลูกตุ้มแบบแท่งกลมที่มีคาบน้อยที่สุด

Abstract

In this paper, the results of determination of the local gravity by using the minimized period rod pendulums as the gravimeter have been presented. The studying used five rod pendulums of different lengths and test at a location that has the latitude of $18^{\circ}39'43''$ N and elevation of 300 meters above MSL. Results from this study indicated that, by 12 trials of timing of 100 oscillation cycles of the rod pendulums with the initial angular amplitude less than 2° , the experimental local gravity obtained from the minimized period rod pendulum was $9.800 \pm 0.008 \text{ m/s}^2$. Compared with the calculated local gravity, 9.7847 m/s^2 , the error was 0.2 %, approximately.

Keywords: Gravity measurement, Gravimeter, Minimized period of rod pendulum

1. บทนำ

งานทางด้านการทดลองทางวิศวกรรมที่ละเอียดอ่อนต้องการค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น (Local gravity) ที่แท้จริง ไม่สามารถใช้ค่ามาตรฐานเท่ากับ 9.81 m/s^2 เพราะจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความคลาดเคลื่อนออกไปจากความเป็นจริง เช่น ในการทดลองต่างๆ เกี่ยวกับการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple harmonic motion) และการสั่นสะเทือนอย่างอิสระ ไม่มีการหน่วง การทดลองเกี่ยวกับลูกตุ้ม (Pendulum) ประเภทต่างๆ การคำนวณจะต้องใช้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นเสมอจึงจะได้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรง [1]

ค่าความโน้มถ่วงในแต่ละบริเวณจะแตกต่างกันขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย เช่น ความสูงเหนือระดับน้ำทะเลปานกลาง ตำแหน่งละติจูด ลักษณะทางธรณีวิทยา เป็นต้น สถาบันมาตรวิทยาแห่งชาติได้วัดค่าแรงโน้มถ่วงจำนวน 7 จุด ครอบคลุมทุกภาคของประเทศไทย พบว่า บริเวณจังหวัดเชียงใหม่มีค่าแรงโน้มถ่วงประมาณ $9.784261950 \pm 0.39 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$ [2]

การหาค่าแรงโน้มถ่วงเคยมีการนำเสนอมาแล้วหลายวิธี การทดลองโดยใช้ลูกตุ้มอย่างง่าย (Simple pendulum) เพื่อเวลาเฉลี่ยของการแกว่งที่สัมพันธ์กับความยาวของลูกตุ้มแล้วนำมาคำนวณหาค่าแรงโน้มถ่วง ยังมีปัจจัยที่ทำให้ผลลัพธ์เกิดคลาดเคลื่อนได้ เช่น การหาจุดศูนย์กลางถ่วงอย่างละเอียดของลูกตุ้มนั้นทำได้ยาก มวลและความยืดหยุ่นของเส้นลวดก็มีผลต่อความยาวที่ใช้คำนวณ เป็นต้น [3] การทดลองโดยใช้ลูกตุ้มประกอบ (Compound pendulum) หรือ (Physical pendulum) เป็นการทดลองที่ทำได้ง่าย สามารถลดข้อจำกัดหลายอย่างของลูกตุ้มอย่างง่ายและผลลัพธ์การหาค่าแรงโน้มถ่วงมีความน่าเชื่อถือได้ [4] การจับเวลาในการหาคาบ (Oscillation period) ของการแกว่งลูกตุ้มก็เพียง 10 รอบ และทำซ้ำ 5 ครั้ง การทดลองจำนวนซ้ำจำนวนน้อยนั้นจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าคลาดเคลื่อนสูง [5] และในการหาค่าความคลาดเคลื่อน (Error) เป็นร้อยละก็ต้องเปรียบเทียบกับค่าความโน้มถ่วงมาตรฐาน g_0 แทนที่จะเป็นค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น ณ สถานที่ทดลอง

ในบทความนี้จะนำเสนอวิธีการหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่เที่ยงตรง มีวิธีการทดลองที่สามารถทำได้ง่าย ใช้เครื่องทดลองที่ไม่ซับซ้อน ราคาถูกและสร้างได้เองโดยใช้ลูกตุ้มประกอบแบบแท่งกลม (Rod pendulum) เป็นมาตรฐานความโน้มถ่วง (Gravimeter) ซึ่งมีการกระจายมวลอย่างสม่ำเสมอและขนาดความยาวลดหลั่นกัน 5 แท่งทำการทดลองครั้งนี้

วัตถุประสงค์ของบทความนี้ต้องการนำเสนอวิธีการทดลองหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นและเปรียบเทียบกับค่าจากการคำนวณ ด้วยวิธีการกำหนดตำแหน่งของจุดรองรับให้เป็นลูกตุ้มแท่งกลมที่มีคาบน้อยที่สุด (Minimized period) และผลลัพธ์การทดลองต้องมีค่าคลาดเคลื่อน (Error) จากค่าคำนวณไม่เกิน 0.5 %

2. ขอบเขตงานวิจัย

2.1 ทำการทดลองหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นด้วยลูกตุ้มแท่งกลมที่มีคาบน้อยที่สุด โดยใช้ลูกตุ้ม 5 แท่งความยาว 1299.20 mm, 1350.50 mm, 1399.50 mm, 1450.36 mm และ 1500.00 mm

2.2 เปรียบเทียบค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นจากการทดลองกับการค่าจากการคำนวณต้องมีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.5 %

2.3 การทดลอง ณ มหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่ อ.หางดง จ.เชียงใหม่ มีพิกัดอยู่ที่เส้นรุ้ง $18^{\circ}39'34''\text{N}$ และมีระดับความสูง 300 m AMSL

3. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

3.1 ลูกตุ้มประกอบแบบทั่วไป

พิจารณาจุดศูนย์กลางการแกว่งของลูกตุ้มประกอบรูปที่ 1 ซึ่งแกว่งบนระนาบ X-Y ที่จุด O จุด G คือตำแหน่งจุดศูนย์กลางของลูกตุ้มประกอบ ให้ I_0 เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบจุด O ใช้การสมมูลทางพลศาสตร์จะได้:

$$\Sigma M = I_0 \ddot{\theta} = -mgx \sin \theta$$

$$I_0 \ddot{\theta} + mgx \sin \theta = 0$$

สำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุมน้อยๆ $\sin \theta \cong \theta$ (มีหน่วยเป็น rad) ดังนั้น:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgx}{I_o} \theta = 0$$

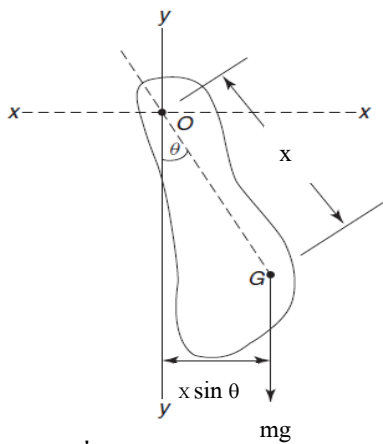
เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์กับรูปแบบของสมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว, $\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$, จะได้:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{I_o}} \quad (1)$$

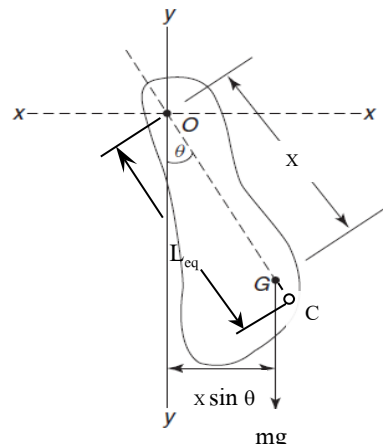
และมีคาบของการแกว่งเป็น [6]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{mgx}} \quad (2)$$

เมื่อ T คือคาบเวลาการแกว่งของลูกตุ้ม, I_o คือโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลบนระนาบ X-Y ที่จุด O และ x คือระยะทางจากจุดหมุนถึงจุดศูนย์กลางมวล



รูปที่ 1 ลูกตุ้มประกอบแบบทั่วไป



รูปที่ 2 จุดศูนย์กลางการแกว่งของลูกตุ้มประกอบ

จากทฤษฎีแกนขนาน จะได้:

$$I_o = I_G + mx^2 = mk_G^2 + mx^2$$

เมื่อ I_G คือโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลบนระนาบ X-Y ที่จุด G และ k_G^2 คือรัศมีไจเรชัน (Radius of gyration) บนระนาบ X-Y ที่จุด G สมการ (2) จึงกลายเป็น:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(k_G^2 / x + x)}{g}} \quad (3)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับลูกตุ้มอย่างง่ายที่ยาว L_{eq} ซึ่งมีคาบ T เท่ากันกับลูกตุ้มประกอบ จะได้ [7], [8]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{(k_G^2 / x + x)}{g}} \quad (4)$$

โดย L_{eq} เป็นความยาวที่สมมูลกับลูกตุ้มอย่างง่ายและมวลทั้งหมดถือว่าเป็นจุดอยู่ที่จุด C ซึ่งเรียกว่าเป็นจุดศูนย์กลางการแกว่ง (Center of oscillation) รอบจุด O (ดูรูปที่ 2) โดย:

$$OC = L_{eq} = k_G^2 / x + x \quad (5)$$

และเมื่อสลับให้จุด C เป็นจุดที่แขวนลูกตุ้มแทนจุด O, จุด O ก็จะกลายเป็นจุดศูนย์กลางการแกว่งรอบจุด C จัดรูปสมการ (5) ใหม่เป็น:

$$x^2 - L_{eq} x + k_G^2 = 0 \quad (6)$$

ซึ่งได้เป็นรูปแบบของสมการกำลังสองที่มีรากอยู่สองค่าคือ x_1 และ x_2 ในลักษณะที่:

$$x_1 + x_2 = L_{eq} \quad (7)$$

และ

$$x_1 \cdot x_2 = k_G^2 \quad (8)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างคาบ T กับระยะห่าง x จากจุดศูนย์กลางได้แสดงอยู่ในรูปที่ 3 เมื่อใช้จุด O เป็นจุดแขวนจะมีความยาวสองค่าที่มีคาบเท่ากัน คือ $GO_1 = x_1$ และ $GO_2 = x_2$ และเมื่อสลับจุดแขวนเป็นจุด C ก็จะมีอีกสองความยาวสองค่าที่มีคาบเท่ากัน คือ $GC_1 = x_1$ และ $GC_2 = x_2$

ระยะห่างที่จะทำให้มีคาบน้อยที่สุดจะหาได้จาก:

$$\frac{d}{dx} L = \frac{d}{dx} (k_G^2 / x + x) = -k_G^2 / x^2 + 1 = 0$$

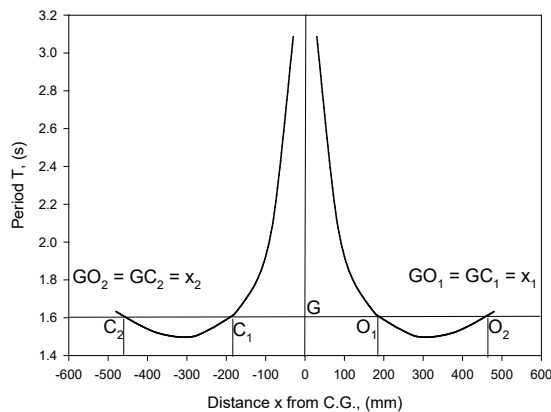
นั่นคือ

$$x = k_G = x_{T_{min}} \quad (9)$$

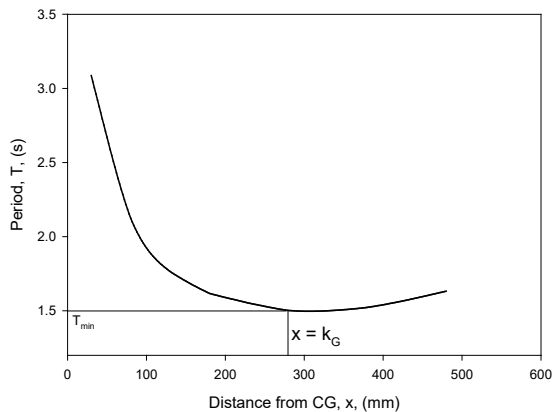
และ

$$T_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{2k_G}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2x_{T_{min}}}{g}} \quad (10)$$

โดย $k_G^2 = I_G/m$ ดังแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 3 คาบ T กับระยะห่าง x จากจุดศูนย์กลาง



รูปที่ 4 คาบ T_{min} กับระยะห่าง $x = k_G = x_{T_{min}}$ จากจุดศูนย์กลาง

3.2 ลูกตุ้มแบบแท่งแบบทั่วไป

พิจารณาลูกตุ้มประกอบแบบที่ง่ายที่สุดคือลูกตุ้มแบบแท่ง (Rod หรือ stick หรือ bar pendulum ตามหน้าตัด) ซึ่งแขวนในตำแหน่งที่จุดศูนย์กลางอยู่ห่างจากจุดรองรับเป็นระยะทาง x ใดๆ (รูปที่ 5)

แทนค่า $I_O = mL^2/12 + mx^2$ ลงในสมการ (2) ได้:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2/12 + mx^2}{mgx}} = 2\pi \sqrt{\frac{L^2/12 + x^2}{gx}} \quad (11)$$



รูปที่ 5 ลูกตุ้มแบบแท่ง

จะเห็นว่าในกรณีของลูกตุ้มประกอบรูปแบบที่ง่ายที่สุด คือเป็นแท่งความสัมพันธ์ระหว่างค่ากำลังสองของคาบ (T^2) ไม่ได้เป็นปฏิภาคกับความยาว L เหมือนกับกรณีของลูกตุ้มอย่างง่าย แต่จะขึ้นอยู่กับระยะห่าง x ระหว่างจุดศูนย์กลางถ่วงกับจุดรองรับแทน ซึ่งทำให้การนำลูกตุ้มประกอบมาใช้เป็นมาตรฐานความโน้มถ่วงมีความซับซ้อนมากกว่าลูกตุ้มอย่างง่าย

ยกกำลังสองสมการ (11) แล้วจัดรูปสมการเพื่อหาค่า x ได้:

$$x^2 - g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 x + \frac{L^2}{12} = 0 \quad (12)$$

ซึ่งเป็นสมการกำลังสองที่มีรูปแบบมาตรฐานเป็น:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

และจะหารากได้จาก:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ในกรณีนี้ $a = 1$, $b = -g[T/(2\pi)]^2$, $c = L^2/12$, ดังนั้น:

$$x = \frac{g[T/(2\pi)]^2 \pm \sqrt{(g[T/(2\pi)]^2)^2 - 4(L^2/12)}}{2} \quad (13)$$

การแก้สมการ (13) จำเป็นต้องใช้ค่าของ g , L และ T ซึ่งมีวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการแก้สมการนี้ได้หลายวิธี

การใช้ลูกตุ้มแท่งเป็นมาตรฐานความโน้มถ่วงสามารถจำแนกได้เป็นสองวิธี คือวิธีดั้งเดิม (*Classical method*) กับวิธีใหม่ (*Novel method*)

วิธีดั้งเดิม ไม่ใช้การแก้สมการ (13) แต่ทดลองโดยกำหนดค่า x แล้วหาค่าของ d จากความยาวของลูกตุ้มแท่งซึ่งมีค่าคงที่ วิธีใหม่ ใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้สมการ (13) เพื่อนำไปสู่การหาค่าความโน้มถ่วงในขั้นต่อไป

ในบทความนี้จะนำเสนอวิธีใหม่ด้วยการกำหนดระยะ $x = x_{T_{\min}}$ ซึ่งเป็นระยะที่จะทำให้มีคาบน้อยที่สุด (Minimized period) เพียงวิธีเดียวเท่านั้น

พิจารณาในกรณีที่ x เป็นระยะซึ่งจะทำให้มีคาบน้อยที่สุด ซึ่งจะหาได้จาก:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{L^2/12 + x^2}{gx} \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{L^2 + 12x^2}{12gx} \right] = 0$$

จะได้:

$$x_{T_{\min}} = L/\sqrt{12} = L/(2\sqrt{3}) \quad (14)$$

ซึ่งได้ผลลัพธ์เหมือนกับสมการ (9) เพื่อใช้ลูกตุ้มแท่งเป็นมาตรฐานความโน้มถ่วง ปรับสมการ (10) เป็น:

$$g = 4\pi^2 \left(\frac{2x_{T_{\min}}}{T_{\min}^2} \right)$$

เมื่อแทนค่า $2x_{T_{\min}} = L/\sqrt{3}$, จะได้:

$$g = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{L}{T_{\min}^2} \right) \quad (15)$$

ลูกตุ้มแท่งในวิธีนี้เรียกได้ว่าเป็น ลูกตุ้มแท่งที่มีคาบน้อยที่สุด

จากการวิเคราะห์ข้างต้นทำให้เกิดแนวคิดในการหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น g ด้วยลูกตุ้มแท่งที่มีคาบน้อยที่สุดได้ 3 วิธี คือ:

1. เนื่องจากอัตราส่วน L กับ $T_{\min}^2$ มีค่าคงที่ การคำนวณสามารถทำได้โดยนำลูกตุ้มแท่งที่มีคาบน้อยที่สุดหนึ่งแท่ง ความยาวเดิยมาแกว่ง แล้วจับเวลาหาคาบในการแกว่งก็จะสามารถหาค่า g ได้จากสมการ (15) คือ:

$$g = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}} \frac{L}{T_{\min}^2}$$

แม้ว่าทางทฤษฎีจะได้ค่า g ที่เที่ยงตรงจากวิธีการนี้ แต่ในทางปฏิบัตินั้นแทบจะเป็นไปไม่ได้ วิธีที่เป็นไปได้คือควรจะทำการหลายซ้ำ

2. นำลูกตุ้มแท่งที่มีคานน้อยที่สุดหลายแท่งและความยาวแตกต่างกัน มาแกว่งที่ละแท่งแล้วจับเวลาเพื่อหาคานในการแกว่งเช่นเดียวกับวิธีที่ 1 แล้วคำนวณหาค่า g จากค่าเฉลี่ยของอัตราส่วน $L/T_{\min}^2$ คือ:

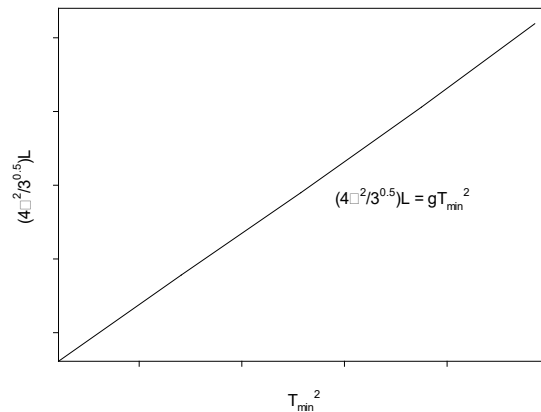
$$g = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{L}{T_{\min}^2} \right)_{Av} \quad (15a)$$

วิธีการนี้ก็คือการทำตามวิธีที่ 1 ซ้ำหลายครั้ง โดยแปรเปลี่ยนค่าความยาวของลูกตุ้มแบบแท่งจึงจะได้ค่า g จากวิธีที่ 2 ก็คือค่าเฉลี่ยของการทดลองหลายครั้ง

3. นำค่าของ $(4\pi^2/\sqrt{3})L$ และ $T_{\min}^2$ จากการทดลองของวิธีที่ 2 มาทำเป็นกราฟดังรูปที่ 6 ค่า g หาได้จากค่าความชันของเส้นกราฟโดยตรง เพราะว่า:

$$g = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}} \frac{\Delta L}{\Delta T_{\min}^2} \quad (15b)$$

วิธีที่ 3 ควรได้ผลลัพธ์เท่ากับวิธีที่ 2 เพราะเป็นการหาค่าเฉลี่ยเหมือนกันแต่เป็นวิธีทางกราฟ



รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่าง $(4\pi^2/\sqrt{3})L$ กับ $T_{\min}^2$ ของลูกตุ้มแท่งที่มีคานน้อยที่สุด

จะสังเกตจากสมการ (15), (15a) และ (15b) ได้ว่าการหาค่าความโน้มถ่วงวิธีนี้ สิ่งที่ต้องวัดมีเพียงระยะ d จากปลายของลูกตุ้มแท่งถึงจุดรองรับ (รูปที่ 7) และคานในการแกว่งของลูกตุ้มแท่งแต่ละความยาวเท่านั้น

ในบทความนี้จะให้ความสำคัญกับวิธีที่ 2 และวิธีที่ 3 เนื่องจากวิธีที่ 1 เป็นส่วนหนึ่งของวิธีที่ 2 อยู่แล้ว เนื่องจากต้องใช้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นทางทฤษฎีเพื่อการเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการทดลอง ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นทางทฤษฎีจะคำนวณได้จากสมการ International Gravity Formula 1967 ที่ยอมรับมานานและให้ผลลัพธ์แม่นยำ [9], [10]:

$$g(\phi, h) = 9.7803184 (1 + 5.3024 \times 10^{-3} \sin^2 \phi - 5.9 \times 10^{-6} \sin^2 2\phi) - 3.086 \times 10^{-6} h \quad (16)$$

เมื่อ ϕ คือ องศาเส้นละติจูดทางภูมิศาสตร์ และ h คือ ระดับความสูงเหนือน้ำทะเลปานกลาง, มีหน่วยเป็น m AMSL

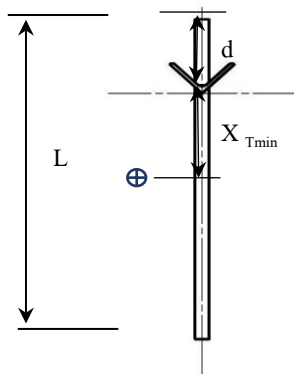
4. การดำเนินการวิจัย

สถานที่ทำการทดลอง ณ คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่ อ.หางดง จ.เชียงใหม่ มีพิกัดอยู่ที่เส้นรุ้ง $18^{\circ}39'34''N$ และมีระดับความสูง 300 m AMSL เมื่อแทนค่า ϕ และ h ของสถานที่ทดลองลงในสมการ (16) ก็จะได้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นซึ่งจากการคำนวณและใช้เป็นความโน้มถ่วงอ้างอิง [10]:

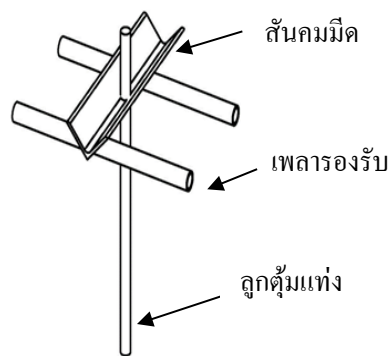
$$g(18.66^{\circ}, 300 \text{ m}) = 9.784681227 \text{ m/s}^2 \cong 9.7847 \text{ m/s}^2 = g_{\text{Cal}}$$

4.1 อุปกรณ์ทดลอง

เครื่องทดลองหาความโน้มถ่วงใช้หลักการของลูกตุ้มแท่งกลมและอุปกรณ์ แสดงดังรูปที่ 7-8:



รูปที่ 7 ระยะห่างจากปลายถึงจุดหมุนของลูกตุ้ม



รูปที่ 8 โครงสร้างชุดทดลองลูกตุ้มแบบแท่ง

1. ลูกตุ้มแบบแท่งสร้างจากเหล็กแท่งเกลียวเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 mm มีความยาวแตกต่างกัน 5 แท่ง ใช้ทดลองเป็นลูกตุ้มแท่งที่มีคาบน้อยที่สุด กำหนดระยะห่างจากปลายถึงจุดรองรับ ดังรูปที่ 7 และแสดงในตารางที่ 1 ซึ่งคำนวณจาก $d = L/2 - x_{Tmin}$ โดย $x_{Tmin} = L/(2\sqrt{3})$ การวัดความยาวของแท่งเกลียวใช้บรรทัดโลหะที่มีค่าละเอียดที่สุด (Least count) 1 mm ร่วมกับเวอร์เนียคาลิเปอร์ที่มีค่าละเอียดที่สุด 0.02 mm
2. สันคมมีด (Knife-edge support) ทำจากเหล็กฉากขนาด 25.4×25.4 mm หน้า 1.5 mm มีความยาว 80 mm มีเป็นเกลียวเชื่อมติดกับสันเหล็กฉากที่ถูกเจาะทะลุ เพื่อให้เมื่อสวมกับแท่งเกลียวแล้วปลายแท่งเกลียวสามารถสอดผ่านเหล็กฉากขึ้นไปได้ ดังรูปที่ 8 ระยะ d วัดจากปลายบนของลูกตุ้มแท่งถึงสันเหล็กฉาก (ซึ่งเป็นจุดรองรับ) สันคมมีดจะถูกรองรับด้วยเพลาลูกตุ้มเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 mm สองท่อนซึ่งยึดอยู่กับโครงรองรับ
3. นาฬิกาจับเวลาที่มีค่าละเอียดที่สุด 0.01 วินาที

ตารางที่ 1 ระยะห่างจากปลายถึงจุดหมุนของลูกตุ้มแท่งที่มีคาบน้อยที่สุด (หน่วยเป็น mm)

L	1299.20	1350.50	1399.50	1450.36	1500.00
x_{Tmin}	375.05	389.86	404.00	418.68	433.01
d	274.55	285.39	295.75	306.50	316.99

4.2 วิธีทดลอง

1. นำลูกตุ้มแท่งแรกที่ยาว 1299.20 mm มาใส่สันคมมีดให้อยู่ห่างจากปลายเป็นระยะ 274.55 mm แล้วนำลูกตุ้มแท่งที่ใส่สันคมมีดแล้วไปวางบนเพลารองรับ (Support shaft)
2. จับลูกตุ้มแท่งให้เบนออกจากตำแหน่งสมดุลสถิต (Static equilibrium) เป็นมุมไม่เกิน 2 องศาจากแนวดิ่ง เพื่อให้การทดลองเป็น Small oscillation เพื่อลดการสั่น การหน่วง หรือแรงต้านอื่นๆ ที่มาจากปัจจัยภายนอก จากนั้นจึงปล่อยลูกตุ้มแท่งให้แกว่งได้อย่างอิสระ ควบคุมการแกว่งของลูกตุ้มให้อยู่ในบัพระนาบในแนวดิ่ง จับเวลาการแกว่งจำ 100 รอบ แล้วจดบันทึกเวลา โดยทำซ้ำทั้งหมด 12 ครั้ง
3. เปลี่ยนเป็นลูกตุ้มแท่งที่ยาว 1350.50 mm และตั้งระยะห่างระหว่างปลายกับสันคมมีดเป็น 285.39 mm แล้วทดลองซ้ำตามขั้นตอนถัดต่อมาจนเสร็จการทดลองครบทั้งห้าแท่ง ได้ข้อมูลทั้งหมดดังแสดงไว้ในตารางที่ 2

5. ผลการวิจัย

ผลการทดลองหาค่าเวลาการแกว่งของลูกตุ้มมีคาบน้อยที่สุด ที่มีขนาดความยาวแตกต่างกัน 5 แท่ง และจำนวนรอบการแกว่ง 100 รอบ ทดลองซ้ำ 12 ครั้ง

ตารางที่ 2 ข้อมูลของลูกตุ้มแท่งกลมที่มีคาบน้อยที่สุด

ครั้งที่	เวลาในการแกว่งครบ 100 รอบ ($100T_{\min}$, s) ที่ความยาวต่างๆ				
	1299.20	1350.50	1399.50	1450.36	1500.00
1	173.91	177.28	180.50	183.75	186.72
2	173.78	177.35	180.37	183.72	186.78
3	173.85	177.13	180.31	183.66	186.69
4	173.88	177.43	180.59	183.66	186.75
5	173.84	177.25	180.59	183.78	186.68
6	173.78	177.16	180.50	183.62	186.66
7	173.81	177.13	180.47	183.81	186.62
8	173.82	177.36	180.54	183.69	186.72
9	173.84	177.31	180.44	183.69	186.63
10	173.75	177.06	180.44	183.65	186.78
11	173.80	177.16	180.50	183.78	186.69
12	173.79	177.16	180.56	183.69	186.59
เฉลี่ย	173.82	177.23	180.48	183.71	186.69

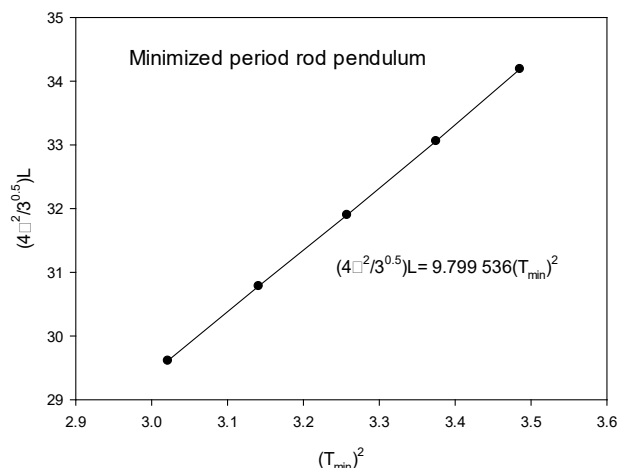
เมื่อได้ผลการทดลองจากความสัมพันธ์ของความยาวของลูกตุ้มแท่งกลมที่มีคาบน้อยที่สุดกับเวลาในการแกว่ง สามารถนำไปคำนวณหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นของลูกตุ้มความยาวต่างๆ ได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ผลลัพธ์ของลูกตุ้มแท่งกลมที่มีคาบน้อยที่สุด

L (m)	$(4\pi^2/3^{0.5})L$ (m)	$T_{\min}^2$ (s ²)	$(4\pi^2/3^{0.5})L/T_{\min}^2$ (m/s ²)
1.29920	29.6125	3.0214	9.801 024
1.35050	30.7818	3.1411	9.799 661
1.39950	31.8986	3.2575	9.792 505
1.45035	33.0576	3.3749	9.795 220
1.50000	34.1893	3.4854	9.809 269
		เฉลี่ย	9.7995

ผลลัพธ์การทดลองของลูกตุ้มแท่งกลมที่มีคาบน้อยที่สุดได้แสดงไว้ในตารางที่ 3 โดยมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้:

นำความยาวของลูกตุ้มแท่งจากตารางที่ 2 มาใส่ในคอลัมน์แรก คูณด้วย $4\pi^2/3^{0.5}$ แล้วใส่ผลลัพธ์ไว้ในคอลัมน์ที่ 2
 คำนวณหา $T_{\min}^2$ ในคอลัมน์ที่ 3 โดยหารเวลาเฉลี่ย (แถวสุดท้ายของตารางที่ 2) ด้วย 100 แล้วยกกำลังสอง จากนั้นคำนวณหา
 ค่าอัตราส่วน $(4\pi^2/3^{0.5})L/T_{\min}^2$ ในคอลัมน์ที่ 4 โดยหารคอลัมน์ที่สองด้วยคอลัมน์ที่สาม แล้วหาค่าเฉลี่ยของอัตราส่วน
 $(4\pi^2/3^{0.5})L/T_{\min}^2$ ได้ $[(4\pi^2/3^{0.5})L/T_{\min}^2]_{Av} = 9.799\ 536\ \text{m/s}^2 \cong 9.7995\ \text{m/s}^2 = g_{Av}$ ดังรูปที่ 9



รูปที่ 9 ความสัมพันธ์ระหว่าง $(4\pi^2/3)L$ กับ $T_{\min}^2$ ของลูกตุ้มแท่งกลมที่มีคานน้อยที่สุด

เมื่อนำค่าของ $(4\pi^2/3)L$ กับ $T_{\min}^2$ จากตารางที่ 3 ซึ่งเป็นผลการทดลองของลูกตุ้มที่มีความยาวลดหลั่นกัน 5 แท่ง มาพล็อตเป็นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(4\pi^2/3)L$ กับ $T_{\min}^2$ ก็จะได้กราฟเส้นตรงในรูปที่ 9 มีค่าความชันของเส้นกราฟเป็น $(4\pi^2/3) \Delta L / \Delta T_{\min}^2 \cong 9.7997 \text{ m/s}^2 = g_{\text{Gr}}$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยแรงโน้มถ่วงท้องถิ่นของลูกตุ้มแท่งกลมที่มีคานน้อยที่สุดของทุกความยาวลูกตุ้ม สามารถคำนวณจากสมการที่ 15(a) และ 15(b) และการพล็อตกราฟ โดยพบว่า มีค่าต่างจากค่าของ g_{Av} เพียง 0.002% ดังนั้นค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่ได้จากค่าเฉลี่ยในตารางที่ 3 กับค่าความชันในรูปที่ 9 จึงมีค่าเท่ากันโดยประมาณเป็น:

$$g_{\text{Gr}} = g_{\text{Av}} \cong 9.8 \text{ m/s}^2 = g_{\text{Exp}}$$

โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าคำนวณ,

$$g_{\text{Cal}} = 9.7847 \text{ m/s}^2$$

$$\% \text{Error} = \text{ABS} (9.8 / 9.7847 - 1) 100 = 0.1564 \text{ หรือประมาณ } 0.2\%$$

ในการทดลองนี้ความคลาดเคลื่อนที่สำคัญมีสาเหตุได้จากการวัดความยาวของลูกตุ้มแท่งและการจับเวลาในการหาคาบของการแกว่ง

การวัดความยาววัดโดยเทียบกับแท่งเกลียวที่มีความยาวเต็มจากผู้ผลิต คือยาว 1500 mm โดยนำแท่งที่ถูกตัดกับไม้ลูกตมาวางขนานจัดปลายที่ไม่ถูกตัดของทั้งสองแท่งเสมอกัน แล้วใช้เวอร์เนียคาลิเปอร์วัดจากปลายอีกข้างหนึ่งของแท่งที่ไม่ถูกตัดถึงปลายของแท่งที่ถูกตัด โดยวัดหลายครั้งแล้วเลือกใช้ค่าความยาวที่ซ้ำกันมากที่สุด และการตั้งระยะ d ก็ใช้เวอร์เนียคาลิเปอร์เช่นกัน

ในการทดลองหาความโน้มถ่วงท้องถิ่นโดยใช้ลูกตุ้มแท่งกลมเป็นมาตรฐานความโน้มถ่วงนั้น มีความเป็นไปได้ที่จะได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงเป็นที่ยอมรับได้ โดยควรจะต้องทำการทดลองด้วยลูกตุ้มแท่งซึ่งมีการวัดความยาวที่เที่ยงตรง ใช้มุมเริ่มต้นการแกว่งน้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ และควรจะใช้จำนวนรอบในการจับเวลาแต่ละซ้ำมากเพียงพอ

ส่วนความคลาดเคลื่อนในการจับเวลา สิ่งที่สำคัญก็คือเวลาปฏิกิริยา (Human reaction time) ซึ่งเกิดขึ้นสองครั้งในตอนเริ่มต้นการจับเวลาและตอนหยุดการจับเวลา ในการทดลองนี้ใช้จำนวนรอบในการจับเวลาแต่ละซ้ำจำนวน 100 รอบ ซึ่งสามารถช่วยลดความคลาดเคลื่อนของเวลาได้ และได้ทำถึง 12 ซ้ำ จึงควรเป็นการดึงข้อมูลเข้าสู่ค่ากลางที่ละเอียดเพียงพอ

เมื่อพิจารณาความไม่แน่นอน (Uncertainty) ของผลลัพธ์ในตารางที่ 3 จะได้ความไม่แน่นอนสัมบูรณ์ (Absolute uncertainty) มีค่าเป็น $(9.809\ 269 - 9.792\ 505)/2 = \pm 0.008\ \text{m/s}^2$ ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จากลูกตุ้มแท่งกลมที่มีคาน้อยที่สุดจึงควรเป็น $g_{\text{Exp}} = 9.800 \pm 0.008\ \text{m/s}^2$

6. สรุป

ในการทดลองนี้ ได้ใช้ลูกตุ้มแท่งกลมที่มีความยาวตลอดทั้งชิ้นประมาณ 50 mm จำนวน 5 แท่ง, ใช้มุมแกว่งเริ่มต้นไม่เกิน 2 องศา, จับเวลาการแกว่ง 100 รอบ, และแต่ละแท่งจับเวลา 12 ซ้ำ

ผลลัพธ์จากการศึกษานี้ แสดงให้เห็นว่าการทดลองด้วยลูกตุ้มแท่งกลมที่มีคาน้อยที่สุดทั้งวิธีหาค่าเฉลี่ยและวิธีหาค่าความชันของเส้นกราฟ ได้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นเท่ากันมีค่าเท่ากับ $9.8\ \text{m/s}^2$ และเมื่อพิจารณาถึงความไม่แน่นอนของผลลัพธ์ ค่าความโน้มถ่วงที่ได้ควรจะเป็นเท่ากับ $9.800 \pm 0.008\ \text{m/s}^2$ โดยมีความคลาดเคลื่อนเมื่อเปรียบเทียบกับค่ากำหนดประมาณ 0.2% และผลลัพธ์จากการทดลองของลูกตุ้มแท่งที่มีคาน้อยที่สุดบรรลุตามเป้าประสงค์มีค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.5 % ตามที่ตั้งไว้

7. ข้อเสนอแนะ

7.1 การวัดค่าความยาวของแท่งเหล็กที่นำมาเป็นลูกตุ้มในการทดลอง ควรให้เครื่องวัดที่มีความละเอียดสูงและทำการวัดความยาวตลอดทั้งให้ได้ค่าความยาวที่แท้จริง เพื่อลดค่าคลาดเคลื่อนจากการคำนวณที่ต้องใช้ค่าความยาวของแท่งลูกตุ้ม

7.2 การวิจัยในอนาคตควรสร้างหรือจัดหาเครื่องมือจับเวลาพร้อมกับนับรอบการแกว่งของลูกตุ้ม เพื่อให้ได้ค่าเวลาการแกว่งที่แม่นยำและลดความคลาดเคลื่อนจากปฏิกิริยาตอบสนองของมนุษย์

8. เอกสารอ้างอิง

- [1] ณภาพคม ศรีคช, สายชล สิทธิพงศ์, และบัญชา กังตระกูล. (2564). การหาค่าความเร่งจากความโน้มถ่วงท้องถิ่นด้วยลูกตุ้มเดี่ยว. ในการประชุมวิชาการระดับชาติพะเยาวิชัย ครั้งที่ 13. (2593-2604). 25-28 ธันวาคม 2564. พะเยา: มหาวิทยาลัยพะเยา.
- [2] ทศนีย์ ไพรัตน์รัมย์ และณัฐนันท์ วรเดช. (2023). การวัดความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกในประเทศไทย และความสำคัญ. สืบค้น 17 ธันวาคม 2566, จาก: <https://www.nimt.or.th/main/?p=21307>.
- [3] Nelson, R.A., Olsson, M.G., (1986). The pendulum-Rich physics from a simple system. *American Journal of Physics*. 54(2): 112-121.
- [4] Yuningsih, N., Sardjito, S., & Dewi, Y. C. (2020). Determination of earth's gravitational acceleration and moment of inertia of rigid body using physical pendulum experiments. Retrieved on December 17, 2023. from: doi:10.1088/1757-899X/830/2/022001
- [5] Suwanpayak, N., Sutthiyan, S., Kulsirirat, K., Srisongkram, P., Teeka, C., & Buranasiri, P. (2018). A comparison of gravitational acceleration measurement methods for undergraduate experiment. Retrieved on December 17, 2023. from: doi:10.1088/1742-6596/1144/1/012001.
- [6] Beer, F.P, Johnston, E.R, & Cornwell, P.J. (2010). **Vector Mechanics for Engineers: Dynamics**. 9th ed. London: McGraw-Hill
- [7] Serway, R.A., & Jewett, J.W. (2012). **Physics for scientists and engineers with modern Physics**. 9th ed. Boston: Brooks/Cole.

- [8] Young, H., & Freeman, R. (2004). **University physics with Modern Physics**. 11th ed. Boston: Addison Wesley.
- [9] Encyclopedia. (2022). Normal Gravity Formula. Retrieved on January 8, 2024. from: <https://encyclopedia.pub/entry/33797>
- [10] บัญชา กิ่งตระกูล และสาขชล สิทธิพงศ์. (2566). การสืบค้นหาสูตรการคำนวณค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น. *วารสารวิชาการโรงเรียนนายเรือด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี*, 6(1): 161-173.