

การคำนวณหาระยะยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลาภายใต้แรงภายนอกฟังก์ชันไซน์
ในการเคลื่อนที่สั่นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

Calculation the Equation of Spring Collapse Distance as a Function of Time
via External Force Squared Sine Function in Simple Harmonic Motion

อาทิตย์ หู้เต็ม^{1*}, เจษฎาพร ปาคำวัง² และ กาญจน์ คุ่มทรัพย์³

^{1,3}สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

²สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

Artit Hutem^{1*}, Jetsadaporn Pakamwang² and Kan Khoomsab³

^{1,3}Division of Science Education, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University

²Division of Computer Science, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University

artithutem@pcru.ac.th

Received 28 September 2024

Revised 09 November 2024

Accepted 17 December 2024

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณหาสมการระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในระบบวัตถุ
มวล m_a เคลื่อนที่ด้วยแรงภายนอก $f_0 \sin(\omega_f t)$ เข้าชนปลายสปริงที่มีค่าคงที่สปริง k ซึ่งติดกับมวล m_b ซึ่งใน
งานวิจัยนี้ใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่สองเขียนสมการการเคลื่อนที่ แล้วใช้คณิตศาสตร์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์
อันดับที่สองแบบไม่เอกพันธ์มาคำนวณหาสมการระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และคำนวณหา
สมการการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ตอนที่วัตถุสองก้อนชนกันที่สปริงขึ้นกลาง ซึ่งผลจากการคำนวณค่า
ระยะทางยุบตัวของสปริงจะมีการสั่นที่เกิดจำนวนลูกคลื่นลดลง เมื่อค่าคงที่สปริงมีขนาดเพิ่มขึ้น

คำสำคัญ: การกระจัด, ระยะทางยุบตัวของสปริง, แรงภายนอกเริ่มต้น

Abstract

This research aims to calculate the equation of spring collapse distance as a function of
time. In a system of objects, mass m_a moves with an external force $f_0 \sin(\omega_f t)$ against the end
of a spring attached to mass m_b . In this research, Newton's second law of motion is used to write
the equations of motion of this system. We use the mathematics of nonhomogeneous second-order
differential equations to calculate the equation of displacement of the spring as a function of time
and to calculate the equation of displacement between mass m_a and mass m_b when the two
objects collide at the intermediate spring. The result of the calculation of the spring compression
distance will have a decrease in the number of ripples when the spring constant increases.

Keywords: Displacement, Spring-collapse Distance, Initial External Force

1. บทนำ

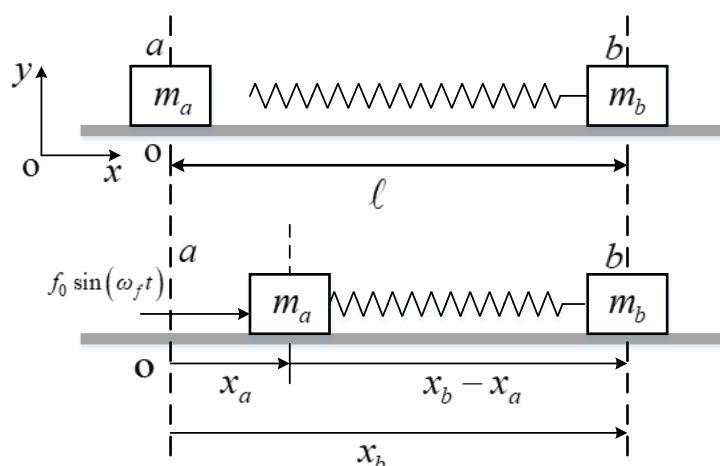
รายวิชาการศาสตร์คลาสสิก 1 ในหัวข้อเกี่ยวกับกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน และการเคลื่อนที่สั่นแบบฮาร์มอนิก ได้มีการอธิบายและแสดงวิธีการคำนวณเกี่ยวกับอนุภาคมวล m_1 ที่เคลื่อนที่เข้าชนกับวัตถุมวล m_2 ที่ติดสปริงกับมวล m_3 ซึ่งในรายวิชาการศาสตร์คลาสสิก 1 ได้อธิบายหลักการของโมเมนตัมหลักการดังกล่าวได้มีการนำไปออกเป็นข้อสอบคัดเลือกโอลิมปิกในการสอบแข่งขัน สอวน. [1] ประจำปี พ.ศ. 2547 (รอบที่ 1) วิชาฟิสิกส์ สอบวันอาทิตย์ ที่ 4 กรกฎาคม พ.ศ. 2547 เวลา 08.00 น.-10.00 น. โจทย์ที่ใช้ในการแข่งขันทางวิชาการในโครงการต่าง ๆ ที่มักจะถูกออกแบบให้ผู้เรียนฝึกฝนความสามารถในการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหาเชิงซับซ้อน ซึ่งการออกแบบโจทย์เช่นนี้ไม่ได้จำกัดเฉพาะในบริบทของประเทศไทยเท่านั้น แต่ยังครอบคลุมถึงการแข่งขันในระดับนานาชาติอีกด้วย การวางรากฐานของความเข้าใจในโจทย์ลักษณะนี้จึงเป็นสิ่งสำคัญในการพัฒนาทักษะการเรียนรู้คิดวิเคราะห์ของผู้เรียนในรายวิชาฟิสิกส์ในระยะยาว ซึ่งในโครงการสอบแข่งขันฟิสิกส์ สอวน. ได้มีโจทย์เกี่ยวกับการคำนวณหาระยะทางยุบตัวของสปริง และเวลาที่วัตถุมวล m_1 เคลื่อนที่เข้าชนมวล m_2 จนสปริงหดตัว ซึ่งในการวิเคราะห์ระบบแบบนี้ต้องใช้หลักการกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน และคณิตศาสตร์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งนักเรียน ณ. โรงเรียนแห่งหนึ่งของจังหวัดเพชรบูรณ์ได้เรียนรายวิชาฟิสิกส์ สอวน. (สอวน.คือ ศูนย์ส่งเสริมและพัฒนาทักษะทางการศึกษาเกี่ยวกับวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ภายใต้พระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอเจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์) ซึ่งข้าพเจ้าได้ทำการสอนในเนื้อหากฎการเคลื่อนที่ของนิวตันซึ่งมีนักเรียนมาถามโจทย์ลักษณะแบบนี้ ซึ่งทำให้ข้าพเจ้าได้เกิดความคิดขยายระบบการเคลื่อนที่ที่เป็นระบบวัตถุมวล m_a เคลื่อนที่ด้วยแรงภายนอก $f_0 \sin(\omega_f t)$ โดยที่ f_0 ขนาดแรงภายนอกเริ่มต้น $\omega_f = 2\pi f$ เป็นค่าความถี่เชิงมุม โดยมีค่าความถี่ f เข้าชนปลายสปริงที่มีค่าคงที่สปริง k ซึ่งติดกับมวล m_b ซึ่งในงานวิจัยนี้ไม่คิดผลของแรงเสียดทาน ดังรูปที่ 1 วัตถุประสงคิในงานวิจัยนี้ต้องการคำนวณหาสมการระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

2. ขอบเขตงานวิจัย

ขอบเขตของงานวิจัยนี้คือ คำนวณหาสมการระยะทางยุบตัวของสปริงที่ติดกับมวล m_b ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา ในระบบวัตถุมวล m_a เคลื่อนที่ด้วยแรงภายนอก $f_0 \sin(\omega_f t)$ ซึ่งมีลักษณะการสั่นแบบสม่ำเสมอ เข้าชนแบบยืดหยุ่นปลายสปริงที่มีค่าคงที่สปริง k ซึ่งติดกับมวล m_b ไม่ตรึงอยู่กับที่ ซึ่งงานวิจัยนี้ไม่ได้คิดแรงเสียดทานระหว่างพื้นกับมวล m_a และมวล m_b ดังรูปที่ 1 และทำการเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลากับตัวแปรต้น เช่น ค่าคงที่สปริง k และค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 เป็นต้น และคำนวณหาสมการการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ตอนที่วัตถุสองก้อนชนกันที่มีสปริงชั้นกลาง

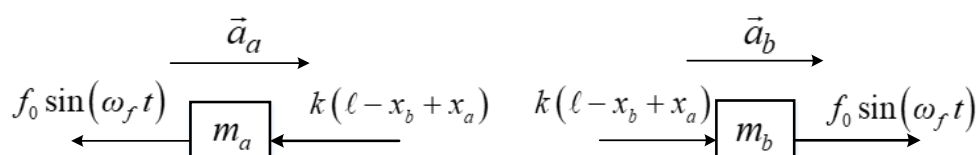
3. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในงานวิจัยนี้พิจารณาตำแหน่ง a มีมวล m_a ถูกแรงภายนอก $f_0 \sin(\omega_f t)$ [6] เคลื่อนที่เข้าชนปลายสปริงที่มีค่าคงที่สปริง k ซึ่งติดกับมวล m_b ณ ตำแหน่ง b เทียบกับจุด o ซึ่งอยู่ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย จากรูปที่ 1 กำหนดให้ ℓ คือระยะห่างระหว่างมวล m_a กับ m_b ขณะที่สปริงไม่ยืดไม่หดเป็นค่าคงที่ การบอกตำแหน่งของมวลทั้ง 2 ก้อน เราใช้จุด o เป็นจุดอ้างอิงกรอบเฉื่อย และมวล m_b ไม่ตรึงอยู่กับที่ ซึ่งในขณะที่ ณ ตำแหน่ง a และตำแหน่ง b เคลื่อนที่ได้การกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น $x_a(t)$ และ $x_b(t)$ ตามลำดับ ซึ่งในงานวิจัยนี้ไม่คิดผลของแรงเสียดทานของระบบ ในที่นี้กำหนดให้ระยะที่สปริงถูกยุบ $\ell - (x_b - x_a)$ เป็นฟังก์ชันของเวลาดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m_a เคลื่อนที่เข้าชนกับมวล m_b ที่ติดสปริง ซึ่งไม่คิดผลของแรงเสียดทาน

สปริงก็ออกแรงผลักมวล m_a ด้วยขนาดของแรงคืนตัว $k(\ell - x_b + x_a)$ และ $f_0 \sin(\omega_f t)$ สปริงก็ออกแรงผลักมวล m_b ด้วยขนาดของแรงคืนตัว $k(\ell - x_b + x_a)$ และ $f_0 \sin(\omega_f t)$ [11,13]



รูปที่ 2 แสดงการแตกแรงภายนอก กับแรงคืนตัวของสปริงที่กระทำต่อวัตถุมวล m_a และ m_b

จากรูปที่ 1 พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวล m_a โดยใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่สอง $\sum \vec{F} = m_a \vec{a}$ [6-7] สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m_a ดังนี้

$$-f_0 \sin(\omega_f t) - k(\ell - x_b(t) + x_a(t)) = m_a \frac{d^2 x_a(t)}{dt^2} \quad (1)$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวล m_b โดยใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่สอง $\sum \vec{F} = m_b \vec{a}$ [8-10] สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m_b [3-4] ดังนี้

$$f_0 \sin(\omega_f t) + k(\ell - x_b(t) + x_a(t)) = m_b \frac{d^2 x_b(t)}{dt^2} \quad (2)$$

นำวัตถุมวล m_b คูณสมการที่ (1) จะได้

$$-f_0 m_b \sin(\omega_f t) - k m_b (\ell - x_b(t) + x_a(t)) = m_a m_b \frac{d^2 x_a(t)}{dt^2} \quad (3)$$

นำวัตถุมวล m_a คูณสมการที่ (2) จะได้

$$f_0 m_a \sin(\omega_f t) + k m_a (\ell - x_b(t) + x_a(t)) = m_a m_b \frac{d^2 x_b(t)}{dt^2} \quad (4)$$

นำสมการที่ (4) ลบ สมการที่ (3) จะได้

$$m_a m_b \left(\frac{d^2 x_b}{dt^2} - \frac{d^2 x_a}{dt^2} \right) = k(m_a + m_b)(\ell - x_b + x_a) + f_0(m_a + m_b) \sin(\omega_f t) \quad (5)$$

ในงานวิจัยนี้กำหนดให้ ℓ คือ ระยะห่างระหว่างมวล m_a กับ m_b ขณะที่สปริงไม่ยืดไม่หดเป็นค่าคงที่ จากสมการที่ (5) ทางซ้ายมือตรงผลต่างของอนุพันธ์อันดับที่สองสามารถเขียนระยะสปริงที่ถูกยุบ เป็น $\ell - (x_b(t) - x_a(t))$ แทนลงในสมการที่ (5) ดังนี้

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dt^2}(\ell - (x_b(t) - x_a(t))) &= \frac{k(m_a + m_b)}{m_a m_b}(\ell - (x_b(t) - x_a(t))) + \frac{f_0(m_a + m_b)}{m_a m_b} \sin(\omega_f t) \\ \frac{d^2}{dt^2}(\ell - (x_b(t) - x_a(t))) + \frac{k(m_a + m_b)}{m_a m_b}(\ell - x_b(t) + x_a(t)) &= -\frac{f_0(m_a + m_b)}{m_a m_b} \sin(\omega_f t) \end{aligned} \quad (6)$$

กำหนดให้ $\kappa_d(t) = \ell - (x_b(t) - x_a(t))$ และ $\beta = -f_0(m_a + m_b)/m_a m_b$ และ $\omega^2 = k(m_a + m_b)/m_a m_b$ โดยที่ ω เรียกว่าความถี่เชิงมุมในการสั่นของระบบมวล โดยที่

$$\frac{m_a + m_b}{m_a m_b} = \frac{1}{\frac{m_a m_b}{m_a + m_b}} = \frac{1}{\mu_r}$$

โดยที่ μ_r ถูกเรียกว่า มวลลดทอน (reduce mass) เราสามารถเขียนสมการที่ (6) จะได้

$$\frac{d^2 \kappa_d(t)}{dt^2} + \omega^2 \kappa_d(t) = \beta \sin(\omega_f t) \quad (7)$$

สมการที่ (7) เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งจะมีผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง [2, 5] ดังนี้ $\kappa_d(t) = \kappa_d^c(t) + \kappa_d^p(t)$ ต่อไปทำการหาผลเฉลยทั่วไป $\kappa_d^c(t)$ [12] โดย ทางขวามือของสมการที่ (7) ต้องมีค่าเป็นศูนย์ ดังนี้

$$\frac{d^2 \kappa_d}{dt^2} + \omega^2 \kappa_d = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \kappa_d^c(t) &= A \cos(\omega t) \cos(\varphi) - A \sin(\omega t) \sin(\varphi) \\ \kappa_d^c(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (9)$$

ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ $\kappa_{d1}^c(t) = \cos(\omega t)$ และ $\kappa_{d2}^c(t) = \sin(\omega t)$ [12] ทำการหาอนุพันธ์ของ $\kappa_{d1}^c(t)$ และ $\kappa_{d2}^c(t)$ เทียบกับเวลา จะได้ $\kappa_{d1}^{c'}(t) = -\omega \sin(\omega t)$ และ $\kappa_{d2}^{c'}(t) = \omega \cos(\omega t)$ ต่อทำการหาผลเฉลย เฉพาะ $\kappa_d^p(t)$ โดยใช้วิธีรอนเสกียน [2]

$$W = \begin{vmatrix} \kappa_{d1}^c(t) & \kappa_{d2}^c(t) \\ \kappa_{d1}^{c'}(t) & \kappa_{d2}^{c'}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{vmatrix} = \omega \quad (10)$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \kappa_{d2}^c(t) \\ f_k^w(t) & \kappa_{d2}^{c'}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin(\omega t) \\ \beta \sin(\omega_f t) & \omega \cos(\omega t) \end{vmatrix} = -\beta \sin(\omega_f t) \sin(\omega t) \quad (11)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \kappa_{d1}^c(t) & 0 \\ \kappa_{d1}^{c'}(t) & f_k^w(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & 0 \\ -\omega \sin(\omega t) & \beta \sin(\omega_f t) \end{vmatrix} = \beta \sin(\omega_f t) \cos(\omega t) \quad (12)$$

$$\frac{du_w^1}{dt} = \frac{W_1}{W} = -\frac{\beta \sin(\omega_f t) \sin(\omega t)}{\omega} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} u_w^1(t) &= -\frac{\beta}{2\omega} \int_0^t 2 \sin(\omega_f t) \sin(\omega t) dt \\ u_w^1(t) &= \frac{\beta}{2\omega} \left(\frac{\sin((\omega_f + \omega)t)}{(\omega_f + \omega)} - \frac{\sin((\omega_f - \omega)t)}{(\omega_f - \omega)} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{du_w^2}{dt} = \frac{W_2}{W} = \frac{\beta \sin(\omega_f t) \cos(\omega t)}{\omega} \quad (15)$$

$$u_w^2(t) = \frac{\beta}{2\omega} \int_0^t 2 \sin(\omega_f t) \cos(\omega t) dt$$

$$u_w^2(t) = \frac{\beta}{2\omega} \left(\frac{(1 - \cos((\omega_f + \omega)t))}{(\omega_f + \omega)} - \frac{(1 - \cos((\omega_f - \omega)t))}{(\omega_f - \omega)} \right) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \kappa_d^p(t) &= u_w^1(t) \kappa_{d1}^c(t) + u_w^2(t) \kappa_{d2}^c(t) \\ \kappa_d^p(t) &= \frac{\beta \cos(\omega t)}{2\omega} \left(\frac{\sin((\omega_f + \omega)t)}{(\omega_f + \omega)} - \frac{\sin((\omega_f - \omega)t)}{(\omega_f - \omega)} \right) \\ &\quad + \frac{\beta \sin(\omega t)}{2\omega} \left(\frac{(1 - \cos((\omega_f + \omega)t))}{(\omega_f + \omega)} - \frac{(1 - \cos((\omega_f - \omega)t))}{(\omega_f - \omega)} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \kappa_d(t) &= \kappa_d^c(t) + \kappa_d^p(t) \\ \kappa_d(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\beta \cos(\omega t)}{2\omega} \left(\frac{\sin((\omega_f + \omega)t)}{(\omega_f + \omega)} - \frac{\sin((\omega_f - \omega)t)}{(\omega_f - \omega)} \right) \\ &\quad + \frac{\beta \sin(\omega t)}{2\omega} \left(\frac{(1 - \cos((\omega_f + \omega)t))}{(\omega_f + \omega)} - \frac{(1 - \cos((\omega_f - \omega)t))}{(\omega_f - \omega)} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

สมการที่ (18) เรียกว่า ระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

$$\begin{aligned} x_b(t) - x_a(t) &= \ell - A \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\beta \cos(\omega t)}{2\omega} \left(\frac{\sin((\omega_f + \omega)t)}{(\omega_f + \omega)} - \frac{\sin((\omega_f - \omega)t)}{(\omega_f - \omega)} \right) \\ &\quad - \frac{\beta \sin(\omega t)}{2\omega} \left(\frac{(1 - \cos((\omega_f + \omega)t))}{(\omega_f + \omega)} - \frac{(1 - \cos((\omega_f - \omega)t))}{(\omega_f - \omega)} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

สมการที่ (19) เรียกว่า การกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ตอนที่วัตถุสองก้อนชนกันที่สปริงขึ้นกลาง จากสมการที่ (19) ถ้าเงื่อนไขขอบเขต คือ $t = 0s$ และ $x_b(0) = \ell$ และ $x_a(0) = 0$ แทนลงในสมการที่ (19) จะได้

$$\begin{aligned} \ell - 0 &= \ell - A - \left(\frac{\beta}{2\omega}(0) - \left(\frac{\beta(0)}{2\omega} \left(\frac{1-1}{(\omega_f + \omega)} - \frac{1-1}{(\omega_f - \omega)} \right) \right) \right) \\ \ell &= \ell - A \end{aligned} \quad (20)$$

ℓ ระยะห่างระหว่างมวล m_a กับ m_b เปลี่ยนแปลงตามค่าแอมพลิจูดเริ่มต้นของการสั่นในผลเฉลยทั่วไป $\kappa_d^c(t)$

4. การดำเนินการวิจัย

จากรูปที่ 1 พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวล m_a โดยใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่สอง $\Sigma \vec{F} = m_a \vec{a}$ [14-16] สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m_a ดังสมการที่ (1) และ พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวล m_b โดยใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่สอง $\Sigma \vec{F} = m_b \vec{a}$ สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m_b ดังสมการที่ (2) ทำการคำนวณหา ระยะทางยุบตัวของสปริงโดยใช้วิธีการปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 แบบไม่เอกพันธ์ และใช้เทคนิคการ อินทิเกรต จะได้ระยะทางยุบตัวของสปริง ดังนี้

$$\kappa_d(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\beta \cos(\omega t)}{2\omega} \left(\frac{\sin((\omega_f + \omega)t)}{(\omega_f + \omega)} - \frac{\sin((\omega_f - \omega)t)}{(\omega_f - \omega)} \right) + \frac{\beta \sin(\omega t)}{2\omega} \left(\frac{(1 - \cos((\omega_f + \omega)t))}{(\omega_f + \omega)} - \frac{(1 - \cos((\omega_f - \omega)t))}{(\omega_f - \omega)} \right)$$

นำสมการระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลาไปทำการเขียนกราฟ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม $\kappa_d(t)$ กับตัวแปรต้น เช่น ค่าคงสปริง k และมวล m_a และ m_b และแรงภายนอกเริ่มต้น f_0

การกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b

$$x_b(t) - x_a(t) = \ell - A \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\beta \cos(\omega t)}{2\omega} \left(\frac{\sin((\omega_f + \omega)t)}{(\omega_f + \omega)} - \frac{\sin((\omega_f - \omega)t)}{(\omega_f - \omega)} \right) - \frac{\beta \sin(\omega t)}{2\omega} \left(\frac{(1 - \cos((\omega_f + \omega)t))}{(\omega_f + \omega)} - \frac{(1 - \cos((\omega_f - \omega)t))}{(\omega_f - \omega)} \right)$$

นำสมการการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาไปทำการเขียนกราฟ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม $x_b(t) - x_a(t)$ กับตัวแปรต้น เช่น ค่าคงสปริง k และมวล m_a และ m_b และแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 ในงานวิจัยนี้ นำสมการที่ (18) ที่เรียกว่าระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และสมการที่ (19) ที่เรียกว่า การกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ตอนที่วัตถุสองก้อนชนกันที่สปริงขึ้นกลางมาเขียนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น กับตัวแปรตาม และตัวแปรควบคุมในการสั่นของระบบมวล m_a และ m_b ดังตารางที่ 1

จากตารางที่ 1 ในกรณีที่ ตัวแปรต้นคือค่าคงสปริง $k_1 = 10$, เป็นเส้นกราฟสีเหลือง $k_2 = 12 \text{ N/m}$, เป็นเส้นกราฟสีเขียว $k_3 = 14 \text{ N/m}$ เป็นเส้นกราฟสีชมพู ถ้าค่าคงสปริงเพิ่มขึ้นทำให้ตัวแปรตามคือ ระยะทางยุบตัวของสปริง $\kappa_d(t)$ มีขนาดเปลี่ยนแปลงตามกราฟที่สอดคล้องรูปที่ 4(a) ต่อมาตัวแปรต้นคือค่ามวล $m_a = 0.065 \text{ kg}$ เป็นเส้นกราฟสีเหลือง มวล $m_a = 0.068 \text{ kg}$ เป็นเส้นกราฟสีเขียว มวล $m_a = 0.071 \text{ kg}$ เป็นเส้นกราฟสีชมพู ถ้าค่ามวล m_a มีขนาดเพิ่มขึ้น ทำให้ตัวแปรตาม คือ ระยะทางยุบตัวของสปริง $\kappa_d(t)$ มีขนาดเปลี่ยนแปลงตามกราฟที่สอดคล้องรูปที่ 3(a) ต่อมาตัวแปรต้นคือค่ามวล $m_b = 0.065 \text{ kg}$ เป็นเส้นกราฟสีเหลือง มวล $m_b = 0.068 \text{ kg}$ เป็นเส้นกราฟสีเขียว มวล $m_b = 0.071 \text{ kg}$ เป็นเส้นกราฟสีชมพู ถ้าค่ามวล m_b มีขนาดเพิ่มขึ้น ทำให้ตัวแปรตาม คือ ระยะทางยุบตัวของสปริง $\kappa_d(t)$ มีขนาดเปลี่ยนแปลงตามกราฟที่สอดคล้องรูปที่ 3(b) ต่อมาตัวแปรต้นคือค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 2 \text{ N}$ เป็นเส้นกราฟสีเหลือง ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 3 \text{ N}$ เป็นเส้นกราฟสีเขียว และค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 4 \text{ N}$ เป็นเส้นกราฟสีชมพู ถ้าค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเพิ่มขึ้นทำให้ตัวแปรตาม คือ ระยะทางยุบตัวของสปริง

$\kappa_d(t)$ มีขนาดเปลี่ยนแปลงตามกราฟที่สอดคล้องรูปที่ 4(b) ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดตัวแปรต้นคือค่าคงสปริง $k_1=10$, เป็นเส้นกราฟสีดำ $k_2=12\text{ N/m}$, เป็นเส้นกราฟสีฟ้า $k_3=14\text{ N/m}$ เป็นเส้นกราฟสีแดง ถ้าค่าคงสปริงเพิ่มขึ้นทำให้ตัวแปรตามคือ การกระจัดระหว่างมวล $x_b(t) - x_a(t)$ มีขนาดเปลี่ยนแปลงตามกราฟที่สอดคล้องรูปที่ 7(a)

ตารางที่ 1 ตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น ตัวแปรตาม และตัวแปรควบคุมของสมการที่ (18) และ (19)

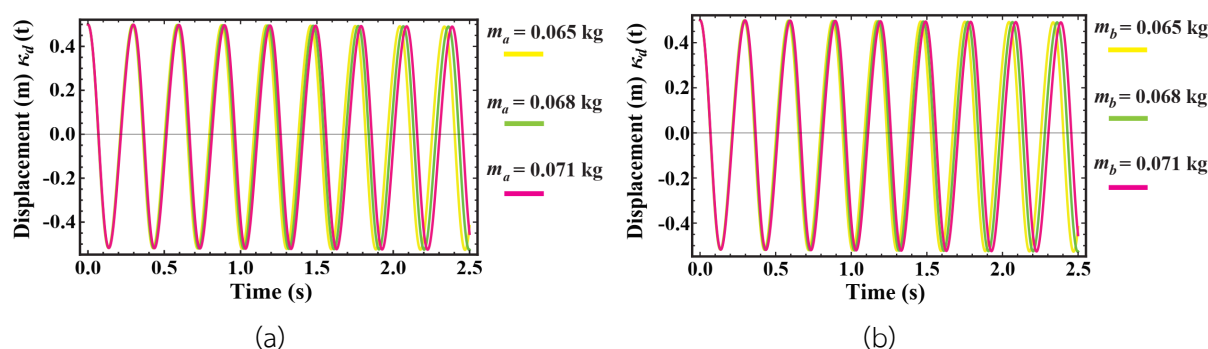
ตัวแปรตาม	ตัวแปรควบคุม	ตัวแปรต้น
ระยะทางยุบตัวของสปริง $\kappa_d(t)$	$A = 0.5, m_a = 0.065\text{ kg}, f_0 = 1\text{ N.},$	ค่าคงสปริง $k_1 = 10$, 
	$\phi = 0\text{ rad } m_b = 0.0645\text{ kg } f = 0.01\text{ Hz}$	$k_2 = 12\text{ N/m}$, 
		$k_3 = 14\text{ N/m}$ 
	$A = 0.5, k = 15\text{ N/m}, f_0 = 1\text{ N.}, \phi = 0\text{ rad}$	มวล $m_a = 0.065\text{ kg}$ 
	$m_b = 0.0645\text{ kg } f = 0.01\text{ Hz}$	$m_a = 0.068\text{ kg}$ 
		$m_a = 0.071\text{ kg}$ 
	$A = 0.5, k = 15\text{ N/m}, f_0 = 1\text{ N.}, \phi = 0\text{ rad}$	มวล $m_b = 0.065\text{ kg}$ 
	$m_a = 0.0645\text{ kg } f = 0.01\text{ Hz}$	$m_b = 0.068\text{ kg}$ 
		$m_b = 0.071\text{ kg}$ 
	$A = 0.5, m_a = 0.065\text{ kg}, k = 15\text{ N/m},$	แรงเริ่มต้น $f_0 = 2\text{ N}$ 
การกระจัดระหว่างมวล $x_b(t) - x_a(t)$	$\phi = 0\text{ rad } m_b = 0.0645\text{ kg } f = 0.01\text{ Hz}$	$f_0 = 3\text{ N}$ 
		$f_0 = 4\text{ N}$ 
	$A = 0.5, m_a = 0.065\text{ kg}, f_0 = 1\text{ N.},$	ค่าคงสปริง $k_1 = 10$ 
	$\phi = 0\text{ rad } m_b = 0.0645\text{ kg } f = 0.01\text{ Hz}$	$k_2 = 12\text{ N/m}$ 
	$\ell = 0.5\text{ m.}$	$k_3 = 14\text{ N/m}$ 
	$A = 0.5, k = 15\text{ N/m}, f_0 = 1\text{ N.}, \phi = 0\text{ rad}$	มวล $m_a = 0.065\text{ kg}$ 
	$m_b = 0.0645\text{ kg } f = 0.01\text{ Hz } \ell = 0.5\text{ m.}$	$m_a = 0.068\text{ kg}$ 
		$m_a = 0.071\text{ kg}$ 
	$A = 0.5, k = 15\text{ N/m}, f_0 = 1\text{ N.}, \phi = 0\text{ rad}$	มวล $m_b = 0.065\text{ kg}$ 
	$m_a = 0.0645\text{ kg } f = 0.01\text{ Hz } \ell = 0.5\text{ m.}$	$m_b = 0.068\text{ kg}$ 
		$m_b = 0.071\text{ kg}$ 
	$A = 0.5, m_a = 0.065\text{ kg}, k = 15\text{ N/m},$	แรงเริ่มต้น $f_0 = 2\text{ N}$ 
	$\phi = 0\text{ rad } m_b = 0.0645\text{ kg } f = 0.01\text{ Hz}$	$f_0 = 3\text{ N}$ 
	$\ell = 0.5\text{ m.}$	$f_0 = 4\text{ N}$ 

ต่อมาตัวแปรต้นคือค่ามวล $m_a = 0.065\text{ kg}$ เป็นเส้นกราฟสีดำ มวล $m_a = 0.068\text{ kg}$ เป็นเส้นกราฟสีฟ้า มวล $m_a = 0.071\text{ kg}$ เป็นเส้นกราฟสีแดง ถ้าค่ามวล m_a มีขนาดเพิ่มขึ้น ทำให้ตัวแปรตาม คือ การกระจัดระหว่างมวล

$x_b(t) - x_a(t)$ มีขนาดเปลี่ยนแปลงตามกราฟที่สอดคล้องรูปที่ 6(a) ต่อมาตัวแปรต้นคือค่ามวล $m_b = 0.065\text{ kg}$ เป็นเส้นกราฟสีดำ มวล $m_b = 0.068\text{ kg}$ เป็นเส้นกราฟสีฟ้า มวล $m_b = 0.071\text{ kg}$ เป็นเส้นกราฟสีแดง ถ้าค่ามวล m_b มีขนาดเพิ่มขึ้นทำให้ตัวแปรตาม คือ การกระจัดระหว่างมวล $x_b(t) - x_a(t)$ มีขนาดเปลี่ยนแปลงตามกราฟที่สอดคล้องรูปที่ 6(b) ต่อมาตัวแปรต้นคือค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 2\text{ N}$ เป็นเส้นกราฟสีดำ ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 3\text{ N}$ เป็นเส้นกราฟสีฟ้า และค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 4\text{ N}$ เป็นเส้นกราฟสีแดง ถ้าค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเพิ่มขึ้นทำให้ตัวแปรตาม คือ การกระจัดระหว่างมวล $x_b(t) - x_a(t)$ มีขนาดเปลี่ยนแปลงตามกราฟที่สอดคล้องรูปที่ 7(b)

5. ผลการวิจัย

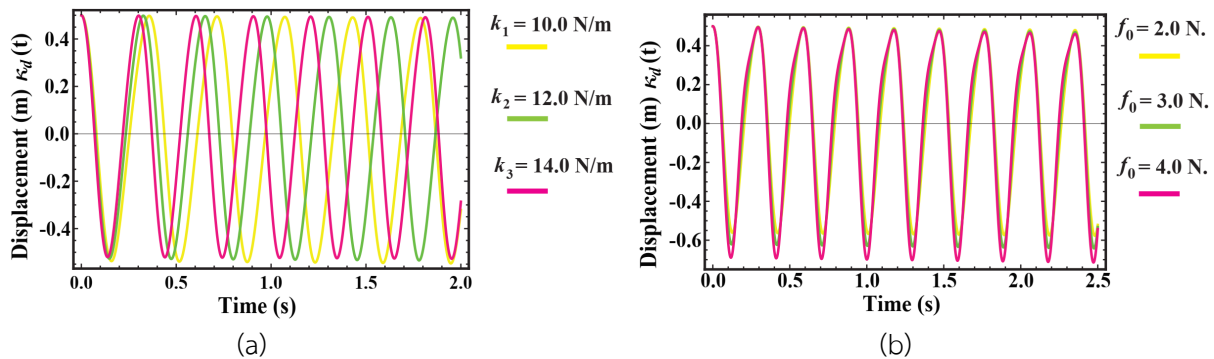
ในงานวิจัยนี้ได้ทำการแสดงกราฟของสมการระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลากับระหว่างตัวแปรตาม $\kappa_d(t)$ กับตัวแปรต้น เช่น ค่าคงสปริง k และมวล m_a และ m_b และแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 ดังรูปที่ 3 และรูปที่ 4 ต่อมานำสมการการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาไปทำการเขียนกราฟ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม $x_b(t) - x_a(t)$ กับตัวแปรต้น เช่น ค่าคงสปริง k และมวล m_a และ m_b และแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 ตามตารางที่ 1 แสดงกราฟได้ดังรูปที่ 5 และรูปที่ 6



รูปที่ 3 กราฟแสดงระยะทางยุบตัวของสปริงกับเวลา (a) ในกรณีที่ขนาดของ $m_a > m_b$ มวล m_a เปลี่ยนแปลงจาก 0.065 $\rightarrow$ 0.071 kg (b) ในกรณีที่ขนาดของ $m_a < m_b$ มวล m_b เปลี่ยนแปลงจาก 0.065 $\rightarrow$ 0.071 kg

จากรูปที่ 3(a) แสดงกราฟระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อขนาดของมวล m_a เปลี่ยนแปลงจาก 0.065 kg ไปเป็น 0.071 kg ซึ่งขนาดของมวล m_b เท่ากับ 0.0645 kg เส้นกราฟสีเหลือง คือ กราฟระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เมื่อขนาดของมวล m_a เป็น 0.065 kg ต่อมาเส้นกราฟสีเขียว คือ กราฟระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เมื่อขนาดของมวล m_a เป็น 0.068 kg ต่อมาเส้นกราฟสีชมพู คือ กราฟระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เมื่อขนาดของมวล m_a เป็น 0.071 kg ถ้าขนาดค่าของมวล m_a มีค่าเพิ่มขึ้นทำให้เกิดค่าของความยาวคลื่นของการสั่นในตัวแปรระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ มากขึ้น และค่าของระยะทางยุบตัวของสปริง $\kappa_d(t)$ วัดจาก 0.0 การสั่นค่าบวก มีค่าเท่ากับ 0.5 m มีค่าขนาดเท่ากับการสั่นค่าลบ คือค่าเท่ากับ 0.5 m เมื่อมวล m_a เคลื่อนที่ด้วยความเร่ง เข้าชนปลายสปริงที่ติดกับมวล m_b จะทำให้มวล m_b เคลื่อนที่ด้วยความเร่ง จากรูปที่ 3(b) แสดงกราฟระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อขนาดของมวล m_b เปลี่ยนแปลงจาก 0.065 kg ไปเป็น 0.071 kg ซึ่งขนาดของมวล m_a เท่ากับ 0.0645 kg เส้นกราฟสีเหลือง คือ กราฟระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เมื่อขนาดของมวล

m_b เป็น 0.065 kg ต่อมาเส้นกราฟสีเขียว คือ กราฟระยะทางยวบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เมื่อขนาดของมวล m_b เป็น 0.068 kg ต่อมาเส้นกราฟสีชมพู คือ กราฟระยะทางยวบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เมื่อขนาดของมวล m_b เป็น 0.071 kg ถ้าขนาดค่าของมวล m_b มีค่าเพิ่มขึ้นทำให้เกิดค่าของความยาวคลื่นของการสั่นในตัวแปรระยะทางยวบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ มากขึ้น และค่าของระยะทางยวบตัวของสปริง $\kappa_d(t)$ การสั่นค่าบวก มีค่าเท่ากับ 0.5 m มีค่าขนาดเท่ากับการสั่นค่าลบ คือค่าเท่ากับ 0.5 m

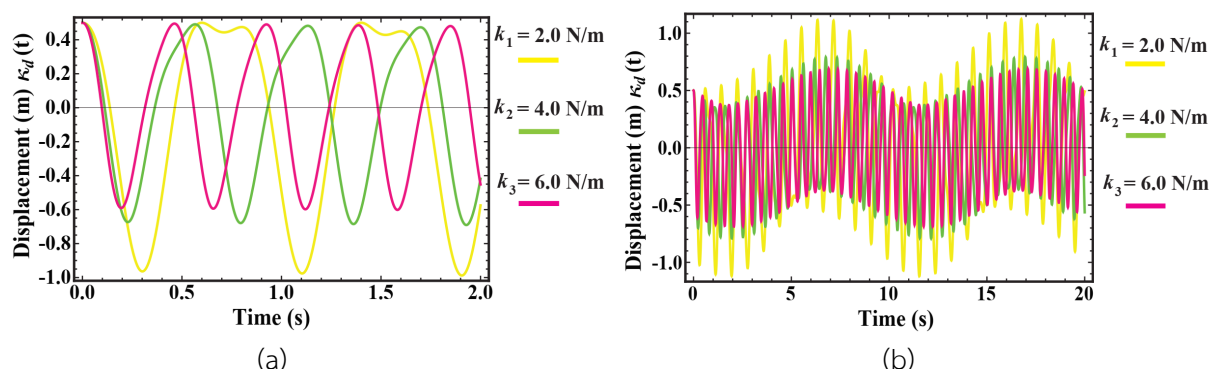


รูปที่ 4 กราฟแสดงระยะทางยวบตัวของสปริงกับเวลา (a) ค่าคงที่ของสปริง k เปลี่ยน $10 \rightarrow 14\text{ N/m}$ (b) ค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 เปลี่ยน $2 \rightarrow 4\text{ N}$

จากรูปที่ 4(a) แสดงกราฟระยะทางยวบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อขนาดของค่าคงที่ของสปริง k เปลี่ยนแปลงจาก 10.0 N/m ไปเป็น 14.0 N/m เส้นกราฟสีเหลือง คือ กราฟระยะทางยวบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เมื่อค่าคงที่ของสปริง k_1 เป็น 10.0 N/m ต่อมาเส้นกราฟสีเขียว คือ กราฟระยะทางยวบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เมื่อขนาดของค่าคงที่ของสปริง k_2 เป็น 12.0 N/m ต่อมาเส้นกราฟสีชมพู คือ กราฟระยะทางยวบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เมื่อขนาดของค่าคงที่ของสปริง k_3 เป็น 14.0 N/m ถ้าค่าคงที่ของสปริงเพิ่มขึ้นส่งผลให้ระยะทางยวบตัวของสปริงระหว่างวัตถุมวล m_a และมวล m_b มีลักษณะการสั่นลดลงเป็นเพราะค่าคงที่สปริงมีค่ามากขึ้นทำให้สปริงแข็ง เกิดการสั่นของระบบลดลง จากรูปที่ 4(b) แสดงกราฟระยะทางยวบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 เปลี่ยนแปลงจาก 2.0 N ไปเป็น 4 N เส้นกราฟสีเหลือง คือ กราฟระยะทางยวบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เมื่อค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 เป็น 2.0 N ต่อมาเส้นกราฟสีเขียว คือ กราฟระยะทางยวบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เมื่อค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 เป็น 3.0 N ต่อมาเส้นกราฟสีชมพู คือ กราฟระยะทางยวบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เมื่อค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 เป็น 4.0 N ถ้าค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 มีขนาดเพิ่มขึ้นทำให้ระยะทางยวบตัวของสปริง $\kappa_d(t)$ ที่มีวิธีการสั่นไม่สมมาตรมากขึ้น รอบ จุด 0.0 ค่าระยะทางยวบตัวของสปริง $\kappa_d(t)$ ส่วนเป็นบวกมีค่า 0.5 m ซึ่งน้อยกว่า ค่าระยะทางยวบตัวของสปริง $\kappa_d(t)$ ส่วนเป็นลบมีค่า 0.7 m และแอมพลิจูดของการสั่นที่มีค่าเป็นบวกเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นค่าแอมพลิจูดลดลง จะตรงข้ามกับแอมพลิจูดของการสั่นที่มีค่าเป็นลบเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นค่าแอมพลิจูดเพิ่มขึ้น

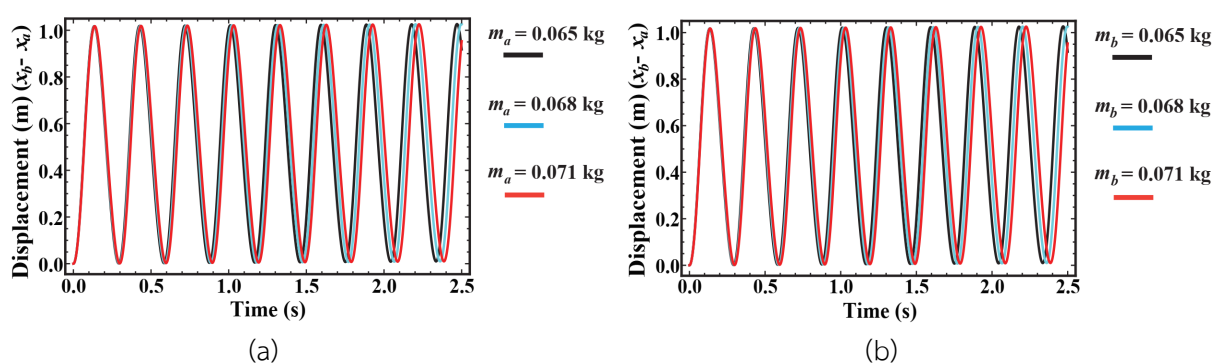
จากรูปที่ 5(a) ถ้าค่าคงที่ของสปริงเพิ่มขึ้นจากเส้นกราฟสีเหลืองมี $k = 2\text{ N/m}$ เปลี่ยนเป็นเส้นกราฟสีชมพูมี $k = 6\text{ N/m}$ ทำให้ระยะทางยวบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เกิดการสั่นแบบไม่สมมาตรรอบจุด 0.0 มากขึ้นเพราะค่าคงที่ของสปริงเพิ่มขึ้นทำให้สปริงมีความแข็งเพิ่มขึ้น ณ ความถี่ $f = 0.01\text{ Hz}$ โดยมีขนาดของแรง

ภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 1\text{ N}$. กราฟเส้นสีเหลืองมีรอยแตกตรงแอมพลิจูด เป็นผลจากค่าคงที่ของสปริงที่มีค่าน้อยทำให้ระยะหดตัวและระยะยืดตัวไปมาวิธีของการสั่น เมื่อค่าคงที่ของสปริงมีขนาดเพิ่มขึ้นรอยแตกตรงแอมพลิจูดหายไป เกิดความเสถียรของการสั่น



รูปที่ 5 กราฟระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ (a) ค่าคงที่ของสปริง k เปลี่ยน $2.0 \rightarrow 6.0\text{ N/m}$ ในช่วงเวลา 0.0 วินาที ถึง 2.0 วินาที โดยมีค่าความถี่ $f = 0.01\text{ Hz}$ (b) ค่าคงที่ของสปริง k เปลี่ยน $2.0 \rightarrow 6.0\text{ N/m}$ ในช่วงเวลา 0.0 วินาที ถึง 20.0 วินาที โดยมีค่าความถี่ $f = 0.1\text{ Hz}$

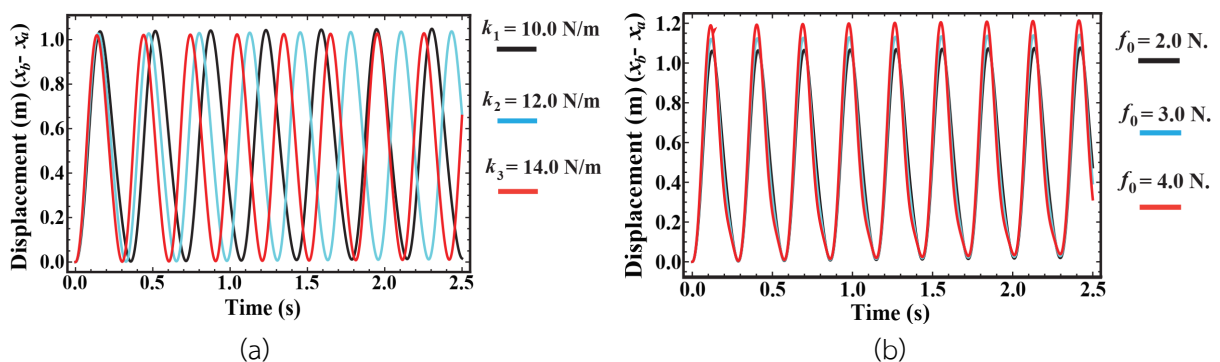
จากรูปที่ 5 (b) ตัวแปรควบคุม คือ ขนาดของค่ามวล m_a เป็น 0.065 kg ขนาดของค่ามวล m_b เท่ากับ 0.0645 kg ขนาดของค่าความถี่ $f = 0.1\text{ Hz}$ และขนาดของแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 1\text{ N}$. ตัวแปรต้นคือ ถ้าค่าคงที่ของสปริงเพิ่มขึ้นจากเส้นกราฟสีเหลืองมี $k = 2\text{ N/m}$ เปลี่ยนเป็นเส้นกราฟสีชมพูมี $k = 6\text{ N/m}$ ทำให้ระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เกิดการสั่นแบบไม่สมมาตรรอบจุด 0.0 เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น เป็นเพราะขนาดของแรงภายนอก $f_0 \sin(\omega_f t)$ ถ้า $\omega_f = 2\pi f$ ถ้าค่าความถี่เพิ่มขึ้นจะส่งให้ระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ เกิดการสั่นแบบไม่สมมาตร จากรูปที่ 5(b) เมื่อทำการเพิ่มเวลาจะทำให้เห็นระบบการสั่นของสปริงระหว่างมวลทั้งสองอย่างชัดเจน



รูปที่ 6 กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ (a) ในกรณีที่ขนาดของ $m_a > m_b$ มวล m_a เปลี่ยนแปลงจาก $0.065 \rightarrow 0.071\text{ kg}$ (b) ในกรณีที่ขนาดของ $m_a < m_b$ มวล m_b เปลี่ยนแปลงจาก $0.065 \rightarrow 0.071\text{ kg}$

จากรูปที่ 6(a) แสดงกราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อขนาดของมวล m_a เปลี่ยนแปลงจาก 0.065 kg ไปเป็น 0.071 kg ซึ่งขนาดของมวล m_b เท่ากับ 0.0645 kg เส้นกราฟสีดำ คือ กราฟการ

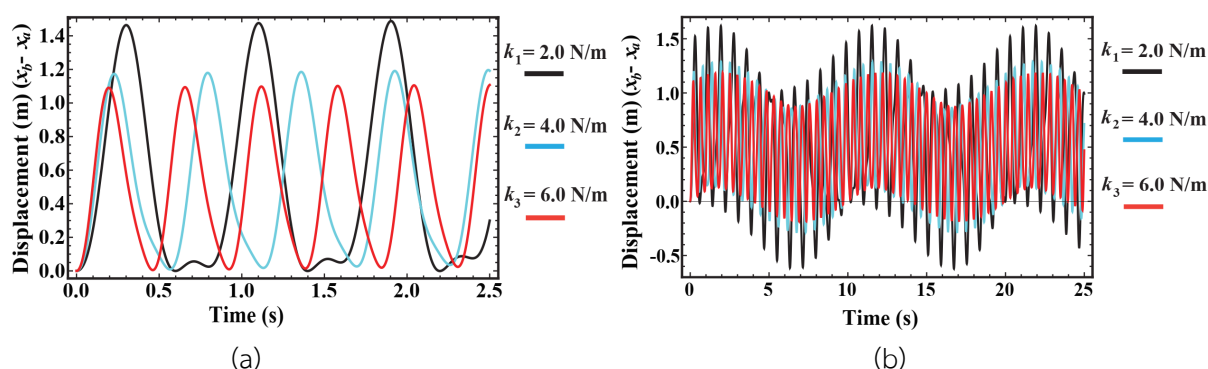
กระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อขนาดของมวล m_a เป็น 0.065 kg ต่อมาเส้นกราฟสีฟ้า คือ กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อขนาดของมวล m_a เป็น 0.068 kg ต่อมาเส้นกราฟสีแดง คือ กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อขนาดของมวล m_a เป็น 0.071 kg ถ้าขนาดของมวล m_a มีค่าเพิ่มขึ้นทำให้เกิดค่าของความยาวคลื่นของการสั่นในตัวแปรการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\kappa_d(t)$ มากขึ้น และค่าของการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชัน $(x_b - x_a)$ วัดจาก 0.0 การสั่นค่าบวกเท่านั้น มีค่าเท่ากับ 1.0 m จากรูปที่ 6(b) แสดงกราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อขนาดของมวล m_b เปลี่ยนแปลงจาก 0.065 kg ไปเป็น 0.071 kg ซึ่งขนาดของมวล m_a เท่ากับ 0.0645 kg เส้นกราฟสีดำ คือ กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อขนาดของมวล m_b เป็น 0.065 kg ต่อมาเส้นกราฟสีฟ้า คือ กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อขนาดของมวล m_b เป็น 0.068 kg ต่อมาเส้นกราฟสีแดง คือ กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อขนาดของมวล m_b เป็น 0.071 kg ถ้าขนาดค่าของมวล m_b มีค่าเพิ่มขึ้นทำให้เกิดค่าของความยาวคลื่นของการสั่นในตัวแปรกราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ มากขึ้น และค่าของการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชัน $(x_b - x_a)$ วัดจาก 0.0 การสั่นค่าบวกเท่านั้น มีค่าเท่ากับ 1.0 m



รูปที่ 7 กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ (a) ค่าคงที่ของสปริง k เปลี่ยน $10 \rightarrow 14\text{ N/m}$ (b) ค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 เปลี่ยน $2 \rightarrow 4\text{ N}$

จากรูปที่ 7(a) แสดงกราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อขนาดของค่าคงที่ของสปริง k เปลี่ยนแปลงจาก 10.0 N/m ไปเป็น 14.0 N/m เส้นกราฟสีดำ คือ กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อค่าคงที่ของสปริง k_1 เป็น 10.0 N/m ต่อมาเส้นกราฟสีฟ้า คือ กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อขนาดของค่าคงที่ของสปริง k_2 เป็น 12.0 N/m ต่อมาเส้นกราฟสีแดง คือ กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อขนาดของค่าคงที่ของสปริง k_3 เป็น 14.0 N/m ถ้าค่าคงที่ของสปริงเพิ่มขึ้นส่งผลให้กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ ระหว่างวัตถุมวล m_a และมวล m_b มีลักษณะการสั่นลดลง เป็นเพราะค่าคงที่สปริงมีค่ามากขึ้นทำให้สปริงแข็ง เกิดการสั่นของระบบลดลง จากรูปที่ 7(b) แสดงกราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 เปลี่ยนแปลงจาก 2.0 N ไปเป็น 4 N เส้นกราฟสีดำ คือ กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$

เมื่อค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 เป็น 2.0 N ต่อมาเส้นกราฟสีฟ้า คือ กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 เป็น 3.0 N ต่อมาเส้นกราฟสีแดง คือ กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เมื่อค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 เป็น 4.0 N ถ้าค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 มีขนาดเพิ่มขึ้นทำให้กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ ที่มีวิธีการสั่นไม่สมมาตรมากขึ้นตั้งแต่ จุด 0.0 และขนาดของค่ากราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เพิ่มขึ้น



รูปที่ 8 กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ (a) ค่าคงที่ของสปริง k เปลี่ยน $2 \rightarrow 6\text{ N/m}$ ในช่วงเวลา 0.0 วินาที ถึง 2.5 วินาที (b) ค่าคงที่ของสปริง k เปลี่ยน $2 \rightarrow 6\text{ N/m}$ ในช่วงเวลา 0.0 วินาที ถึง 25.0 วินาที

จากรูปที่ 8(a) ถ้าค่าคงที่ของสปริงเพิ่มขึ้นจากเส้นกราฟสีดำมี $k = 2\text{ N/m}$ เปลี่ยนเป็นเส้นกราฟสีแดงมี $k = 6\text{ N/m}$ ทำให้กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เกิดการสั่นแบบไม่สมมาตรรอบจุด 0.0 มากขึ้นเพราะค่าคงที่ของสปริงเพิ่มขึ้นทำให้สปริงมีความแข็งเพิ่มขึ้น ณ ความถี่ $f = 0.01\text{ Hz}$ โดยมีขนาดของแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 1\text{ N}$. กราฟเส้นสีดำมีรอยแตกตรงแอมพลิจูดฐานล่าง เป็นผลจากค่าคงที่ของสปริงที่มีค่าน้อยทำให้ระยะหดตัวและระยะยืดตัวไปมาวิถีของการสั่นไม่เสถียร แต่พอค่าคงที่ของสปริงมีขนาดเพิ่มขึ้นรอยแตกตรงแอมพลิจูดหายไป เกิดความเสถียรของการสั่น

6. สรุป

ถ้าค่าคงที่ของสปริงเพิ่มขึ้นส่งผลให้ระยะทางยุบตัวของสปริงระหว่างวัตถุมวล m_a และมวล m_b มีลักษณะการสั่นลดลง เป็นเพราะค่าคงที่สปริงมีค่ามากขึ้นทำให้สปริงแข็ง เกิดการสั่นของระบบลดลง ถ้าขนาดของมวล m_a และมวล m_b มีค่าเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ระยะทางยุบตัวของสปริงของวัตถุมวล m_a และมวล m_b ณ เวลาตั้งแต่ 0.7 วินาทีเป็นต้นเกิด ค่าความยาวคลื่นของการสั่นเพิ่มขึ้น ถ้าขนาดของแรงภายนอกเริ่มต้นมีค่าเพิ่มขึ้นส่งผลให้ระยะทางยุบตัวของสปริงของวัตถุมวล m_a และมวล m_b มีลักษณะการสั่นเพิ่มขึ้นลักษณะเส้นกราฟของระยะทางยุบตัวของสปริงไม่มีความสมมาตรเป็นเพราะขนาดของแรงภายนอก ถ้าค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 มีขนาดเพิ่มขึ้นทำให้ระยะทางยุบตัวของสปริง $\kappa_d(t)$ ที่มีวิธีการสั่นไม่สมมาตรมากขึ้น รอบ จุด 0.0 ค่าระยะทางยุบตัวของสปริง $\kappa_d(t)$ ส่วนเป็นบวกมีค่า 0.5 m ซึ่งน้อยกว่า ค่าระยะทางยุบตัวของสปริง $\kappa_d(t)$ ส่วนเป็นลบมีค่า 0.7 m และแอมพลิจูดของการสั่นที่มีค่าเป็นบวกเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นค่าแอมพลิจูดลดลง จะตรงข้ามกับแอมพลิจูดของการสั่นที่มีค่าเป็นลบเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นค่าแอมพลิจูดเพิ่มขึ้น

ถ้าค่าคงที่ของสปริงเพิ่มขึ้นส่งผลให้การกระจัดของวัตถุมวล m_a และมวล m_b มีลักษณะการสั่นลดลง เป็นเพราะค่าคงที่สปริงมีค่ามากขึ้นทำให้สปริงแข็ง เกิดการสั่นของระบบลดลง ถ้าขนาดของมวล m_a และมวล m_b มีค่าเพิ่มขึ้นจะ

ส่งผลให้การกระจัดของวัตถุมวล m_a และมวล m_b ณ เวลาตั้งแต่ 0.7 วินาทีเป็นต้น เกิด ค่าความยาวคลื่นของการสั่นเพิ่มขึ้น ถ้าขนาดของแรงภายนอกเริ่มต้นมีค่าเพิ่มขึ้นส่งผลให้การกระจัดของวัตถุมวล m_a และมวล m_b มีลักษณะการสั่นเพิ่มขึ้นลักษณะเส้นกราฟของการกระจัดไม่มีความสมมาตรเป็นเพราะขนาดของแรงภายนอกถ้าค่าคงที่ของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 มีขนาดเพิ่มขึ้นทำให้กราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ ที่มีวิธีการสั่นไม่สมมาตรมากขึ้นตั้งแต่ จุด 0.0 และขนาดของค่ากราฟการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $(x_b - x_a)$ เพิ่มขึ้น

7. ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ควรเพิ่มการเขียนโปรแกรมทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการใช้คำสั่ง Manipulate สร้างสื่อการเรียนการสอนให้กับสมการระยะทางยุบตัวของสปริงที่เป็นฟังก์ชันของเวลากับระหว่างตัวแปรตาม $\kappa_d(t)$ กับตัวแปรต้น เช่น ค่าคงสปริง k และมวล m_a และ m_b และแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 และสร้างสื่อการเรียนการสอนให้กับสมการการกระจัดระหว่างมวล m_a และ m_b ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาไปทำการพล็อตกราฟ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม $x_b(t) - x_a(t)$ กับตัวแปรต้น เช่น ค่าคงสปริง k และมวล m_a และ m_b และแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 เป็นต้น

8. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัย จนกระทั่งงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

9. เอกสารอ้างอิง

- [1] วุทธิพันธุ์ ปรัชญพฤทธิ์ และ สุวรรณ คูสำราญ, *กลศาสตร์*, พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร: มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา, 2552.
- [2] K.F. Riley and M.P. Hobson, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, 3th ed. New York: Cambridge University Press, 2006.
- [3] A. Atamp, *Introduction to Classical Mechanics*, 1st ed. United States America: Prentice-Hall, 1990.
- [4] P.S. Goldstein, *Classical Mechanics*, 3th ed. United States America: Prentice-Hall, 2002.
- [5] R.S. Murray and L. John, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 2nd ed. New York: McGraw Hill, 1999.
- [6] C. Saptip, P. Moonsri and A. Hutem, "Calculation of displacement and velocity of particle perturbation by time-dependent external force of cosine and sine function," *Journal of Science and Technology Phetchabun Rajabhat University*, vol. 1, no. 2, pp. 1-7, 2021.
- [7] A. Hutem, "Calculation of the time-dependent velocity and displacement of particle move under time-dependent external force of damping oscillation," *Journal of Science and Technology CRRU*, vol. 2, no. 1, pp. 1-7, 2023.
- [8] พลานันท์ ปะจายะกฤตย์ และกนก ทองสว่าง, "การไต่-บินเดินทางพร้อมกัน," *วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีนายเรืออากาศ*, ปีที่ 20, ฉบับที่ 1, มกราคม-มิถุนายน, หน้า. 93-107, 2567.

- [9] วรากรณ์ พูลจันทร์, เทียนสิริ เหลืองวิไล, วีระพล วิลามาต, สมภูมิ มีชานา, สุภาวดี สีสายุทธ และสามารถ หมดและ, “การวิเคราะห์พฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนผ่านผนังอาคารเมื่อใช้วัสดุปิดผิวที่ต่างกัน โดยใช้ระเบียบวิธีของแถว,” *วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีนายเรืออากาศ*, ปีที่ 17, ฉบับที่ 1, มกราคม-มิถุนายน, หน้า 1-10, 2564.
- [10] กนก ทองสว่าง และอิทธิ ยุทธยานนท์, “การวิจัยและพัฒนาแบบจำลองดาวเทียมเชิงวิศวกรรมเพื่อวิเคราะห์ระบบควบคุมท่าทางการโคจรของดาวเทียม,” *วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีนายเรืออากาศ*, ปีที่ 20, ฉบับที่ 1, มกราคม-มิถุนายน, หน้า 59-72, 2567.
- [11] A. Hutem, S. Suwanwong and A. Wanaek, “Calculation of Velocity and Displacement as Function of Time of Body in the Vertical Movement Under Gravitational Field,” *Journal of Earth Science, Astronomy and Space*, vol. 6, no. 1, pp. 29-46, 2023.
- [12] P. MUSIK, “Development of Computer-Based Experiment Set on Simple Harmonic Motion of Mass on Springs,” *TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology*, vol. 16, no. 4, pp. 1-11, 2017.
- [13] S. Kuaykaew, S. Kerdmee, P. Banyenugam, P. Moonsri and A. Hutem, “The Analytical Description of Projectile Motion of Cricket Ball in a Linear Resisting Medium the Storm Force,” *Applied Mechanics and Materials*, vol. 855, pp. 188-191, 2016.
- [14] A. Hutem and S. Kerdmee, “Physics Learning Achievement Study : Projectile, using Mathematica program of Faculty of Science and Technology Phetchabun Rajabhat University Students,” *European Journal of Physics Education*, vol. 4, no.3, pp.22-33, 2013.
- [15] J. Changkham, P. Moonsri and A. Hutem, “Calculation of Time-Dependent Velocity and Displacement of a Partical in Projectile Motion with Air Resistance, Lift Force and External Force,” *VRU Research and Development Journal Science and Technology*, vol. 19, no. 2, pp. 90-106, 2024.
- [16] J. Changkham, P. Moonsri and A. Hutem, “Modelling the Projectile Motion under a Time Dependent External,” *VRU Research and Development Journal Science and Technology*, vol. 17, no. 2, pp. 45-59, 2024.