

ทฤษฎีการปรากฏค่าของสตาร์อาร์บอริซิตีของกราฟ

The Interpolation Theorems for the Star Arboricity

ธีระศักดิ์ ขอพลอยกลาง^{1*}¹ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษมTeerasak Khoployklang^{1*}¹Department of Mathematics Chandra Kasem Rajabhat University

teerasak.k@chandra.ac.th

Received 08 September 2024

Revised 05 December 2024

Accepted 07 December 2024

บทคัดย่อ

การวิจัยเรื่องทฤษฎีการปรากฏค่าของสตาร์อาร์บอริซิตีของกราฟครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพิสูจน์ว่าสตาร์อาร์บอริซิตีเป็นพารามิเตอร์ของกราฟที่สอดคล้องกับทฤษฎีการปรากฏค่าบนคลาสของกราฟอย่างง่าย และกราฟเชื่อมโยงอย่างง่ายที่มี m เส้น และ n จุด ผลการวิจัยพบว่า สตาร์อาร์บอริซิตีเป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่าบนคลาสของกราฟอย่างง่าย $G(m, n)$ และกราฟเชื่อมโยง $CG(m, n)$ ที่มี m เส้น และ n จุด เมื่อให้ $s = \min\{sa(G) | G \in G(m, n)\}$ และ $t = \max\{sa(G) | G \in G(m, n)\}$ แล้ว สำหรับทุก ๆ ค่า r ซึ่ง $s \leq r \leq t$ จะมีกราฟ $G \in G(m, n)$ ที่มีค่า $sa(G) = r$ เมื่อพิจารณาบนคลาสของกราฟเชื่อมโยงที่มี m เส้น และ n จุด จะได้ว่า ถ้าให้ $s' = \min\{sa(G) | G \in CG(m, n)\}$ และ $t' = \max\{sa(G) | G \in CG(m, n)\}$ แล้ว จะมีกราฟ $G' \in CG(m, n)$ ที่มีค่า $sa(G') = r'$ สำหรับทุก ๆ ค่า r' โดยที่ $s' \leq r' \leq t'$

คำสำคัญ: ทฤษฎีกราฟ, อาร์บอริซิตี, สตาร์อาร์บอริซิตี, ทฤษฎีการปรากฏค่า

Abstract

The purpose of this research is to prove that the star arboricity is an interpolation graph parameter on the class of simple and connected graphs with m edges and n vertices. The result of this research shows that the star arboricity is an interpolation graph parameter on the class of simple and connected graphs with m edges and n vertices denoted by $G(m, n)$ and $CG(m, n)$, respectively. As a result, for $s = \min\{sa(G) | G \in G(m, n)\}$ and $t = \max\{sa(G) | G \in G(m, n)\}$, there exists a graph $G \in G(m, n)$ with $sa(G) = r$ for all $s \leq r \leq t$. In the same way, for $s' = \min\{sa(G) | G \in CG(m, n)\}$ and $t' = \max\{sa(G) | G \in CG(m, n)\}$, there exists a graph $G' \in CG(m, n)$ with $sa(G') = r'$ for all $s' \leq r' \leq t'$.

Keywords: Graph Theory, Arboricity, Star Arboricity, Interpolation Theory

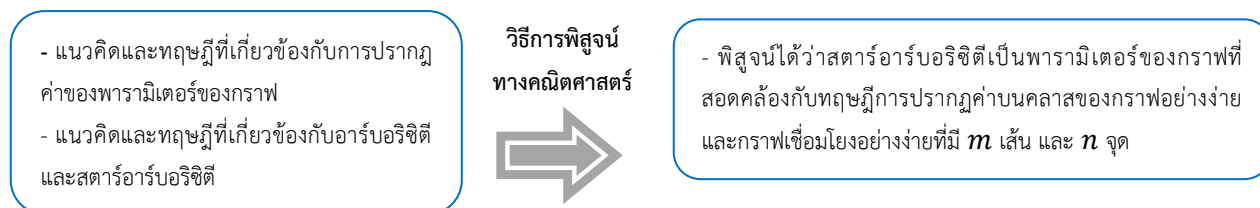
1. บทนำ

ทฤษฎีการปรากฏค่าของพารามิเตอร์ของกราฟ (Interpolation theory of graph parameters) นั้นได้ถูกนำเสนอครั้งแรกในปี 1980 โดย ชาร์ทรานด์ [1] เริ่มจากการศึกษาปัญหาที่กล่าวว่า “ถ้า G เป็นกราฟที่มี กราฟต้นไม้แผ่ทั่วของ G อันหนึ่งมี m ลีฟ (Leaf) และกราฟต้นไม้แผ่ทั่วของ G อีกอันมี n ลีฟ โดยที่ $m < n$ แล้ว จะมีกราฟต้นไม้แผ่ทั่วของ G ที่มี k ลีฟ โดยที่ $m < k < n$ หรือไม่” ปัญหาดังกล่าว ชาร์ทรานด์ สามารถหาคำตอบและแสดงการพิสูจน์ได้ว่า สามารถหากราฟต้นไม้แผ่ทั่วของ G ที่มี k ลีฟได้ และได้นำเสนอผลงานวิจัยในงานประชุมวิชาการ The Theory and Application of Graphs: Fourth International Conference ในปี 1980 จากการนำเสนอผลงานการพิสูจน์ดังกล่าวของชาร์ทรานด์ได้นำไปสู่การศึกษาทฤษฎีการปรากฏค่าของพารามิเตอร์ของกราฟอีก นอกจากนี้ ยังมีการศึกษาบนคลาส (Class) ของกราฟที่แตกต่างกันอีกหลายคลาส อาทิเช่น คลาสของกราฟเชื่อมโยง (Class of connected graphs) และคลาสของกราฟปกติ (Regular graph) เป็นต้น [2-7]

ปัญหาทฤษฎีการปรากฏค่าของพารามิเตอร์ของกราฟ คือการพิจารณาดังต่อไปนี้ ถ้าหากพารามิเตอร์ของกราฟนั้นมีค่าอยู่ระหว่างจำนวนเต็ม m และ n แล้ว จะมีกราฟที่มีค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวที่มีค่าเท่ากับ k ทุก ๆ ค่า k ที่อยู่ระหว่าง m และ n หรือไม่ ถ้ามีสำหรับทุกค่า k จะกล่าวว่าเป็น กราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่า (An interpolation graph parameter) กราฟพารามิเตอร์ตัวนั้นจะเป็นพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกับทฤษฎีการปรากฏค่าบนคลาสของกราฟที่พิจารณา เนื่องจากทฤษฎีการปรากฏค่าของกราฟนั้น มีส่วนสำคัญเกี่ยวกับการยืนยันได้ว่ากราฟที่มีค่าพารามิเตอร์ในขอบเขตที่หาได้นั้น มีกราฟอยู่จริงในทุก ๆ ค่า ภายในขอบเขตของค่าพารามิเตอร์นั้น ในปี 2011 พารามิเตอร์อาร์บอริซิตีนั้นมีผู้ศึกษาและแสดงการพิสูจน์แล้วว่า อาร์บอริซิตีเป็นพารามิเตอร์ของกราฟที่สอดคล้องกับทฤษฎีการปรากฏค่าบนคลาสของกราฟอย่างง่าย (Class of simple graphs) และกราฟเชื่อมโยงอย่างง่าย (Class of simple connected graphs) ที่มี m เส้น และ n จุด [8] เป็นกราฟพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกับทฤษฎีการปรากฏค่าบนคลาสของกราฟปกติที่มี n จุด และดีกรี r [9] นอกจากนี้ ทั้งสองงานวิจัยข้างต้นยังได้ทำการแสดงถึงขอบเขตของค่าอาร์บอริซิตี บนคลาสของกราฟอย่างง่าย กราฟเชื่อมโยงอย่างง่าย และกราฟปกติเช่นกัน การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยมีความสนใจจะศึกษาทฤษฎีการปรากฏค่าของสตาร์อาร์บอริซิตีของกราฟ โดยจะพิสูจน์ว่าสตาร์อาร์บอริซิตีเป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่า นั่นคือ เป็นพารามิเตอร์ของกราฟที่สอดคล้องกับทฤษฎีการปรากฏค่าบนคลาสของกราฟอย่างง่ายและกราฟเชื่อมโยงอย่างง่ายที่มี m เส้น และ n จุด โดยงานวิจัยในครั้งนี้จะใช้กระบวนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ประกอบกับทฤษฎีการปรากฏค่าของพารามิเตอร์ของกราฟ ซึ่งเทคนิคในการพิสูจน์จะสร้างกราฟที่มีจุดเป็นกราฟที่อยู่ในคลาสที่พิจารณาโดยจุดสองจุดจะมีเส้นเชื่อมก็ต่อเมื่อสองจุดนั้นเป็นกราฟที่ได้จากการสร้างมาจากอีกกราฟหนึ่ง หลังจากนั้นจะใช้ทฤษฎีการปรากฏค่าของพารามิเตอร์ของกราฟมาช่วยพิสูจน์บนกราฟที่สร้างขึ้น

2. ขอบเขตงานวิจัย

การวิจัยเรื่องทฤษฎีการปรากฏค่าของ สตาร์อาร์บอริซิตีของกราฟ ขอบเขตทางด้านเนื้อหาประกอบด้วย บทนิยาม แนวคิด และทฤษฎีเกี่ยวกับ อาร์บอริซิตี สตาร์อาร์บอริซิตี และทฤษฎีการปรากฏค่าของพารามิเตอร์ของกราฟ โดยมีกรอบแนวคิดการวิจัยแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

3. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องมีรายละเอียดดังนี้

3.1 บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน

งานวิจัยฉบับนี้จะใช้สัญลักษณ์และบทนิยามพื้นฐานของทฤษฎีกราฟตามหนังสือ Graph Theory ของ Bondy and Murty (1976) [10]

บทนิยาม 3.1.1 กราฟ (Graph) G ประกอบด้วยเซตจำกัด $V(G)$ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และเซตของ $E(G)$ ซึ่งเป็นเซตของคู่อันดับที่ไม่เป็นอันดับ (Unordered pair) ของสมาชิกใน $V(G)$ โดยที่เซตของ $E(G)$ อาจจะเป็นเซตว่างก็ได้ สมาชิกของ $V(G)$ เรียกว่า จุด (Vertex) สมาชิกของ $E(G)$ เรียกว่า เส้น (Edge) ถ้า $|V(G)| = n$ แล้วกราฟ G เป็นกราฟที่มีอันดับ (Order) n นั่นคือกราฟ G มีจุดเป็นจำนวน n จุด ถ้า $|E(G)| = m$ แล้วกราฟ G เป็นกราฟที่มีขนาด (Size) m นั่นคือกราฟ G มีเส้นเป็นจำนวน m เส้น ถ้าทุกเส้นในกราฟ G เชื่อมโยง 2 จุดที่ต่างกันจะเรียกกราฟ G ว่า กราฟอย่างง่าย (Simple graph) ถ้า u และ v เป็นจุดของกราฟ ประกอบเป็นเส้นของกราฟจะเขียนแทนได้ด้วย $\{u, v\}$ เพื่อความสะดวกในการพิจารณาอาจเขียนแทนเส้น $\{u, v\}$ ด้วย uv

บทนิยาม 3.1.2 ดีกรี (Degree) ของจุด v ในกราฟ G เขียนแทนด้วย $deg_G v$ คือ จำนวนเส้นทั้งหมดที่เข้ามาเชื่อมต่อกับจุด v จุดที่มีดีกรีเป็น 0 จะเรียกว่า จุดเอกเทศ (Isolated vertex) จุดที่มีดีกรีเป็น 1 เรียกว่า จุดปลาย (End vertex) ดีกรีสูงสุด (Maximum degree) ของจุดในกราฟ G จะเขียนแทนด้วย $\Delta(G)$ ดีกรีต่ำสุด (Minimum degree) ของจุดในกราฟ G จะเขียนแทนด้วย $\delta(G)$

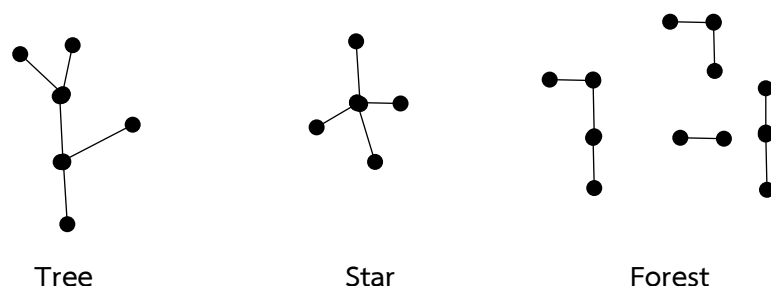
บทนิยาม 3.1.3 ให้จุด u และ v เป็น 2 จุดในกราฟ G โดยไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน แนวเดิน $u - v$ คือ ลำดับของจุดและเส้นโดยที่แนวเดิน $u - v : u = u_0, e_0, u_1, e_1, u_2, e_2, \dots, u_{k-1}, e_{k-1}, u_k = v$ โดยที่ e_i เป็นเส้นของกราฟ G สำหรับทุก ๆ $0 \leq i < k$

แนวเดินที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกันและจุดภายในแนวเดินไม่ซ้ำกัน จะเรียกว่า วง หรือวงจร (Cycle) และแนวเดินที่มีจุดยออดไม่ซ้ำกันจะเรียกว่า วิธี (Path)

กราฟอย่างง่ายที่ทุก ๆ 2 จุดใด ๆ ในกราฟมีแนวเดินเชื่อมโยงถึงกันจะเรียกว่า กราฟเชื่อมโยง (Connected graph)

กราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวงจร จะเรียกว่า กราฟต้นไม้ (Tree) กราฟต้นไม้ที่มีเพียงจุดเดียวที่มีดีกรีมากกว่า 1 โดยที่จุดที่เหลือมีดีกรีเป็น 1 จะเรียกว่า กราฟดาว (Star) กราฟที่ทุก ๆ ส่วนประกอบเป็นกราฟต้นไม้จะเรียกว่า กราฟป่า (Forest)

บทนิยาม 3.1.4 พารามิเตอร์ของกราฟ (Graph parameter) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นกราฟ และมีเรนจ์เป็นจำนวนเต็ม โดยกราฟที่สมมูลฐานกันจะมีค่าพารามิเตอร์เท่ากัน



รูปที่ 2 กราฟต้นไม้ (Tree) กราฟดาว (Star) และกราฟป่า (Forest)

บทนิยาม 3.1.5 อาร์บอริซิตีของกราฟ (Arboricity of graphs) คือ จำนวนเซตของเส้นที่น้อยที่สุดที่ถูกแบ่งกันโดยแต่ละเซตนั้นเป็นกราฟป่า เขียนแทนด้วย $a(G)$

สัญกรณ์ $[A]$ จะแทนจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าเท่ากับ A และ $\lfloor A \rfloor$ จำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าเท่ากับ A

ทฤษฎีบท 3.1.6 [11] สำหรับทุก ๆ กราฟ G ที่มีจำนวนจุด $n > 1$ จะได้

$$a(G) = \max \lfloor q_n / (n - 1) \rfloor$$

เมื่อ $q_n = \max \{ |E(H)| \mid H \text{ เป็นกราฟย่อยของ } G \text{ ที่มี } |V(G)| = n \}$

บทนิยาม 3.1.7 สตาร์อาร์บอริซิตีของกราฟ (Star arboricity of graphs) คือ จำนวนเซตของเส้นที่น้อยที่สุดที่ถูกแบ่งกันโดยแต่ละเซตนั้นกราฟป่าที่มีส่วนประกอบเป็นกราฟดาว เขียนแทนด้วย $sa(G)$

บทนิยาม 3.1.8 ลิเนียร์อาร์บอริซิตี (Linear arboricity) คือ จำนวนเซตของเส้นที่น้อยที่สุดที่ถูกแบ่งกันโดยแต่ละเซตนั้นเป็นกราฟป่าที่มีส่วนประกอบเป็นกราฟวิถี เขียนแทนด้วย $la(G)$

3.2 ทฤษฎีการปรากฏค่าของพารามิเตอร์ของกราฟ

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $\mathbb{G}$ เป็นคลาสของกราฟที่กำหนด จะเรียกฟังก์ชัน $T : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ ว่า การแปลงกราฟบนคลาส $\mathbb{G}$ (A graph transformation on $\mathbb{G}$) นิยามกราฟ $T - \text{graph}$ เป็นกราฟที่มีเซตของจุดเป็น $\mathbb{G}$ และสำหรับ $G_1, G_2 \in \mathbb{G}$ จะมีเส้นเชื่อมก็ต่อเมื่อ $(G_1, G_2) \in T$ ถ้า T เป็นฟังก์ชันสมมาตรแล้ว $T - \text{graph}$ เป็นกราฟไม่มีทิศทาง

บทนิยาม 3.2.2 สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n โดยที่ $m < n$ ให้ $G(m, n)$ และ $CG(m, n)$ แทนคลาสของกราฟอย่างง่ายและกราฟเชื่อมโยงที่มี m เส้น n จุด ตามลำดับ ให้ $G \in G(m, n)$ โดยที่ $e \in E(G)$ และ $e' \notin E(G)$ แล้ว $G^{T(e, e')}$ แทนกราฟที่มี $V(G^{T(e, e')}) = V(G)$ และ $E(G^{T(e, e')}) = E(G) - e + e'$ โดยที่ $T(e, e')$ จะเรียกว่า การแปลงกราฟแบบข้าม (Jumping Transformation)

$T_{(m, n)}$ เป็นความสัมพันธ์บน $G(m, n)$ จะนิยาม $(G_1, G_2) \in T_{(m, n)}$ ถ้า $G_1 \neq G_2$ และ G_1 ได้มาจาก G_2 ด้วยการแปลงกราฟแบบข้าม เพราะ $T_{(m, n)}$ เป็นฟังก์ชันสมมาตร ดังนั้น $T_{(m, n)} - \text{graph}$ เป็นกราฟไม่มีทิศทาง และ $CT_{(m, n)} - \text{graph}$ เป็นกราฟย่อยของ $T_{(m, n)} - \text{graph}$ ซึ่งเป็นกราฟที่ก่อกำเนิดด้วยเซต $CG(m, n)$

ทฤษฎีบท 3.2.3 [7] ให้ $G_1, G_2 \in G(m, n)$ แล้ว จะได้ว่า $G_1 = G_2$ หรือ $G_1 = G_2^{T(e_1, e_1')T(e_2, e_2') \dots T(e_k, e_k')}$ โดยที่ $T(e_1, e_1')T(e_2, e_2') \dots T(e_{k-1}, e_{k-1}')T(e_k, e_k')$ เป็นลำดับจำกัด สำหรับจำนวนเต็ม k ซึ่ง $1 \leq k \leq \binom{n}{2}$

บทแทรก 3.2.4 [7] $T_{(m,n)}$ – graph เป็นกราฟเชื่อมโยง

ทฤษฎีบท 3.2.5 [7] ให้ $G_1, G_2 \in CG(m, n)$ แล้ว จะได้ $G_1 = G_2$ หรือ $G_1 = G_2^{T(e_1, e_1')T(e_2, e_2') \dots T(e_k, e_k')}$ โดยที่ $T(e_1, e_1')T(e_2, e_2') \dots T(e_{k-1}, e_{k-1}')T(e_k, e_k')$ เป็นลำดับจำกัด สำหรับจำนวนเต็ม k ซึ่ง $1 \leq k \leq \binom{n}{2}$

บทแทรก 3.2.6 [7] $CT_{(m,n)}$ – graph เป็นกราฟเชื่อมโยง

บทนิยาม 3.2.7 กำหนดให้ $\mathbb{G}$ เป็นคลาสของกราฟอย่างง่าย และฟังก์ชัน $\theta : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{Z}$ ถ้า $\theta(G_1) = \theta(G_2)$ สำหรับทุก ๆ $G_1, G_2 \in G(m, n)$ ซึ่ง $G_1 \neq G_2$ แล้ว θ เรียกว่า กราฟพารามิเตอร์ (A graph parameter)

บทนิยาม 3.2.8 กำหนดให้ $\mathbb{G}$ เป็นคลาสของกราฟอย่างง่าย และฟังก์ชัน $\theta : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{Z}$ แล้ว จะเรียก θ ว่า กราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่า (An interpolation graph parameter) บนคลาส $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{G}$ ถ้ามีจำนวนเต็ม a และ b โดยที่ $\{\theta(G) : G \in \mathbb{J}\} = [a, b] = \{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \leq b\}$

ทฤษฎีบท 3.2.9 [7] กำหนดให้ $G(m, n)$ เป็นคลาสของกราฟอย่างง่ายที่มี m เส้น และ n จุด และ θ เป็นกราฟพารามิเตอร์แล้ว θ เป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่าบน $G(m, n)$ ถ้า $|\theta(G^{T(e, e')}) - \theta(G)| \leq 1$ สำหรับทุก ๆ $G \in G(m, n)$ และ $T(e, e')$ เป็นการแปลงกราฟแบบข้าม โดยที่ $e \in E(G)$ และ $e' \notin E(G)$

ทฤษฎีบท 3.2.10 [7] กำหนดให้ $CG(m, n)$ เป็นคลาสของกราฟอย่างง่ายที่มี m เส้น และ n จุด และ θ เป็นกราฟพารามิเตอร์แล้ว θ เป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่าบน $CG(m, n)$ ถ้า $|\theta(G^{T(e, e')}) - \theta(G)| \leq 1$ สำหรับทุก ๆ $G \in CG(m, n)$ และ $T(e, e')$ เป็นการแปลงกราฟแบบข้าม โดยที่ $e \in E(G)$ และ $e' \notin E(G)$

ทฤษฎีบท 3.2.11 [7] กำหนดให้ $\mathbb{J} \subseteq G(m, n)$ โดยที่เซตย่อยของ $T_{(m,n)}$ – graph ที่ก่อกำเนิดโดย $\mathbb{J}$ เป็นกราฟเชื่อมโยง ถ้า θ เป็นกราฟพารามิเตอร์บน $\mathbb{J}$ และ $|\theta(G^{T(e, e')}) - \theta(G)| \leq 1$ สำหรับแต่ละกราฟ $G \in \mathbb{J}$ และ $T(e, e')$ เป็นการแปลงกราฟแบบข้าม โดยที่ $e \in E(G)$ และ $e' \notin E(G)$ แล้ว θ เป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่าบนคลาส $\mathbb{J}$

4. การดำเนินการวิจัย

ขั้นตอนการดำเนินการวิจัยมีดังนี้

1. พบนักวิชาการทางคณิตศาสตร์เพื่อประชุม สัมมนา เพื่อให้ได้ประเด็นที่จะทำการศึกษา
2. ศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับประเด็นที่ศึกษา เพื่อกำหนดเป้าหมาย กรอบแนวคิดในการวิจัย และตั้งข้อคาดการณ์
3. พบที่ปรึกษา เพื่อให้คำแนะนำเกี่ยวกับเป้าหมายที่กำหนด กรอบแนวคิด และข้อคาดการณ์ที่ตั้งไว้
4. สืบค้นข้อมูลและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อนำมาสนับสนุนและเป็นแนวทางการศึกษา (พิสูจน์)
5. พิสูจน์ข้อคาดการณ์และตรวจสอบ
6. สรุปผลการศึกษา

5. ผลการวิจัย

จากการศึกษาทฤษฎีการปรากฏค่าของสตาร์อาร์บอริซิติ์ของกราฟ ผู้วิจัยได้ผลการพิสูจน์ทฤษฎีการปรากฏค่าของสตาร์อาร์บอริซิติ์ของกราฟ ได้ผลการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1 ให้ T เป็นการแปลงกราฟแบบข้ามบนกราฟ $G \in G(m, n)$ แล้ว $sa(G^T) \leq sa(G) + 1$

พิสูจน์ กำหนดให้ $T = T(e, e')$ เป็นการแปลงกราฟแบบข้ามบนกราฟ G โดยที่ $e \in E(G)$ และ $e' \notin E(G)$ และ $sa(G) = k > 0$ เพราะกราฟย่อยของแต่ละกราฟจะไม่มีค่าสตาร์อาร์บอริซิติ์ที่สูงกว่าตัวกราฟนั้น ๆ จะได้ว่า กราฟย่อย $G - e$ ของ G จะมีค่า $sa(G - e) \leq k$ ดังนั้น เซตของ $E(G - e)$ สามารถพาร์ทิชันได้เป็น l เซตย่อย นั่นคือ $E_1, E_2, \dots, E_l$ โดยที่ $l \leq k$ และกราฟย่อยของ G ที่ก่อกำเนิดโดย E_i สำหรับทุก ๆ $1 \leq i \leq l$ จะเป็นกราฟป่าที่มีส่วนประกอบเป็นกราฟดาว

เมื่อกราฟย่อย $G - e$ ถูกเพิ่มเส้น e' เข้าไปจะได้ $G - e + e' = G^{T(e, e')} = G^T$ และให้เซต $E(G - e)$ สามารถที่จะพาร์ทิชันได้เป็น l เซตย่อย นั่นคือ $E'_1, E'_2, \dots, E'_l$ โดยที่ $l \leq k$ สำหรับบาง $1 \leq j \leq l$ จะมี $E'_j = E_j \cup \{e'\}$ และ $E'_i = E_i$ สำหรับทุก ๆ $1 \leq i \leq l$ ซึ่ง $i \neq j$ จะพิจารณาการพาร์ทิชันเซตของ $E(G^T)$ เป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 มีเซต E'_i สำหรับบาง $1 \leq i \leq l$ ซึ่งทำให้กราฟย่อยของ G^T ที่ก่อกำเนิดโดย $E_i \cup \{e'\}$ เป็นกราฟป่าที่มีส่วนประกอบเป็นกราฟดาว แล้วจะได้ว่า G^T สามารถพาร์ทิชันได้เป็น l เซตย่อย โดยที่ $l \leq k$ และกราฟย่อยของ G^T ที่ก่อกำเนิดโดย E_i สำหรับทุก ๆ $1 \leq i \leq l$ เป็นกราฟป่าที่มีส่วนประกอบเป็นกราฟดาว ดังนั้น ในกรณีนี้ $sa(G^T) \leq l$

กรณีที่ 2 เซต E'_i สำหรับทุก ๆ $1 \leq i \leq l$ ทำให้กราฟย่อยของ G^T ที่ก่อกำเนิดโดย $E_i \cup \{e'\}$ ไม่เป็นกราฟป่าที่มีส่วนประกอบเป็นกราฟดาว แล้วจะได้ว่า G^T ต้องพาร์ทิชันได้เป็น $l + 1$ เซตย่อย โดยที่ $l \leq k$ นั่นคือ $E'_1, E'_2, \dots, E'_l, E'_{l+1}$ โดยที่ $E'_i = E_i$ สำหรับทุก ๆ $1 \leq i \leq l$ และ $E'_{l+1} = \{e'\}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่ากราฟย่อยของ G^T ที่ก่อกำเนิดโดย E'_i สำหรับทุก ๆ $1 \leq i \leq l + 1$ เป็นกราฟป่าที่มีส่วนประกอบเป็นกราฟดาว ดังนั้น ในกรณีนี้ $sa(G^T) \leq l + 1$

จากทั้ง 2 กรณีจะได้ว่า $sa(G^T) \leq l + 1 \leq k + 1 = sa(G) + 1$

จากผลของทฤษฎีบทข้างต้นจะทำให้ได้บทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 5.2 ให้กราฟ $G \in G(m, n)$ และ T เป็นการแปลงกราฟแบบข้ามบน G แล้ว $|sa(G^T) - sa(G)| \leq 1$

พิสูจน์ เนื่องจาก $sa(G) - 1 \leq sa(G - e)$ และ $sa(G - e) \leq sa(G - e + e') = sa(G^T)$ และโดยผลของทฤษฎีบท 5.1 จะทำให้ได้ว่า $sa(G) - 1 \leq sa(G^T) \leq sa(G) + 1$ นั่นคือ $-1 \leq sa(G^T) - sa(G) \leq 1$ หรือ $|sa(G^T) - sa(G)| \leq 1$

จากผลของบทแทรก 5.2 อาศัยบทแทรก 3.2.4 และทฤษฎีบท 3.2.9 ทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.3 กำหนดให้ $G(m, n)$ เป็นคลาสของกราฟอย่างง่ายที่มี m เส้น และ n จุดแล้ว สตาร์อาร์บอริซิติ์ เป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่าบน $G(m, n)$ และจะได้ว่า ถ้ากำหนดให้ $s = \min\{sa(G) | G \in G(m, n)\}$ และ $t = \max\{sa(G) | G \in G(m, n)\}$ แล้ว สำหรับทุก ๆ ค่า r โดยที่ $s \leq r \leq t$ จะมี $G \in G(m, n)$ ที่มีค่า $sa(G) = r$

พิสูจน์ ให้ $T_{(m, n)} - graph$ เป็นกราฟไม่มีทิศทางที่มีเซตของจุดคือ $G(m, n)$ สำหรับ $G_1, G_2 \in G(m, n)$ โดยที่ $G_1 \neq G_2$ ซึ่ง G_1 และ G_2 จะมีเส้นเชื่อมก็ต่อเมื่อ G_1 ได้มาจาก G_2 ด้วยการแปลงกราฟแบบข้าม โดยบทแทรก 3.2.4 จะได้ว่า $T_{(m, n)} - graph$ เป็นกราฟเชื่อมโยง และโดยผลของบทแทรก 5.2 จะได้ว่า $|sa(G^T) - sa(G)| \leq 1$

สำหรับทุก ๆ $G \in G(m, n)$ โดยทฤษฎีบท 3.2.9 จะได้ว่า sa เป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่าบนคลาส $G(m, n)$ นั่นคือ ถ้ากำหนดให้ $s = \min\{sa(G) | G \in G(m, n)\}$ และ $t = \max\{sa(G) | G \in G(m, n)\}$ แล้ว สำหรับทุก ๆ ค่า r ซึ่ง $s \leq r \leq t$ จะมี $G \in G(m, n)$ ที่มีค่า $sa(G) = r$

นอกจากนี้ ด้วยผลของบทแทรก 5.2 อาศัยบทแทรก 3.2.6 และทฤษฎีบท 3.2.10 ทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้
ทฤษฎีบท 5.4 กำหนดให้ $CG(m, n)$ เป็นคลาสของกราฟเชื่อมโยงที่มี m เส้น และ n จุดแล้ว สตาร์อาร์บอริซิติ เป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่าบน $CG(m, n)$ และจะได้ว่า ถ้ากำหนดให้ $s' = \min\{sa(G) | G \in CG(m, n)\}$ และ $t' = \max\{sa(G) | G \in CG(m, n)\}$ แล้ว สำหรับทุก ๆ ค่า r' ซึ่ง $s' \leq r' \leq t'$ จะมีกราฟ $G' \in CG(m, n)$ ที่มีค่า $sa(G') = r'$

พิสูจน์ ให้ $T_{(m,n)} - graph$ เป็นกราฟไม่มีทิศทางที่มีเซตของจุดคือ $G(m, n)$ สำหรับ $G_1, G_2 \in G(m, n)$ โดยที่ $G_1 \neq G_2$ ซึ่ง G_1 และ G_2 จะมีเส้นเชื่อมก็ต่อเมื่อ G_1 ได้มาจาก G_2 ด้วยการแปลงกราฟแบบข้าม และกำหนดให้ $CT_{(m,n)} - graph$ เป็นกราฟย่อยของ $T_{(m,n)} - graph$ ที่ก่อกำเนิดด้วยเซต $CG(m, n)$ โดยบทแทรก 3.2.6 จะได้ว่า $CT_{(m,n)} - graph$ เป็นกราฟเชื่อมโยง และโดยผลของบทแทรก 5.2 จะได้ว่า $|sa(G^T) - sa(G)| \leq 1$ สำหรับทุก ๆ $G \in CG(m, n)$ โดยทฤษฎีบท 3.2.10 จะได้ว่า sa เป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่าบนคลาส $CG(m, n)$ นั่นคือ ถ้ากำหนดให้ $s' = \min\{sa(G) | G \in CG(m, n)\}$ และ $t' = \max\{sa(G) | G \in CG(m, n)\}$ แล้ว สำหรับทุก ๆ ค่า r' โดยที่ $s' \leq r' \leq t'$ จะมีกราฟ $G' \in CG(m, n)$ ที่มีค่า $sa(G') = r'$

6. สรุป

จากการดำเนินการวิจัยที่มีวัตถุประสงค์เพื่อพิสูจน์ว่าสตาร์อาร์บอริซิติเป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่าซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีการปรากฏค่าบนคลาสของกราฟอย่างง่ายและกราฟเชื่อมโยงอย่างง่ายที่มี m เส้น และ n จุด ผลการวิจัยพบว่า จากผลของทฤษฎีบท 5.3 และ 5.4 สตาร์อาร์บอริซิติเป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่า ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีการปรากฏค่าบนคลาสของกราฟอย่างง่ายและกราฟเชื่อมโยงอย่างง่ายที่มี m เส้น และ n จุด ดังนั้น จะได้ว่าถ้าให้ $s = \min\{sa(G) | G \in G(m, n)\}$ และ $t = \max\{sa(G) | G \in G(m, n)\}$ แล้ว สำหรับทุก ๆ ค่า r ซึ่ง $s \leq r \leq t$ จะมีกราฟ $G \in G(m, n)$ ที่มีค่า $sa(G) = r$ และ ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาบนคลาสของกราฟเชื่อมโยงอย่างง่ายที่มี m เส้น และ n จุด จะได้ว่า ถ้า $s' = \min\{sa(G) | G \in CG(m, n)\}$ และ $t' = \max\{sa(G) | G \in CG(m, n)\}$ แล้ว จะมีกราฟ $G' \in CG(m, n)$ ที่มีค่า $sa(G') = r'$ สำหรับทุก ๆ ค่า r' ซึ่ง $s' \leq r' \leq t'$

7. ข้อเสนอแนะ

7.1 ข้อเสนอแนะสำหรับการปฏิบัติ

7.1.1 นักวิจัยสามารถนำแนวทางในการพิสูจน์ไปใช้ในการพิสูจน์พารามิเตอร์ของกราฟตัวอื่น ๆ ว่าเป็นพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่าบนคลาสของกราฟอย่างง่ายและกราฟเชื่อมโยงที่มี m เส้น และ n จุดหรือไม่ หรือการพิสูจน์ว่า ลิเนียร์อาร์บอริซิติ ลิเนียร์ k อาร์บอริซิติ และสตาร์อาร์บอริซิติเป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่าบนคลาสอื่น ๆ ของกราฟ เช่น คลาสของกราฟปกติ หรือ คลาสของกราฟเชิงระนาบ เป็นต้น

7.1.2 ในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟโดยเฉพาะที่เกี่ยวกับพารามิเตอร์ของกราฟนั้น มักจะใช้การพิสูจน์อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ หากผู้วิจัยต้องการให้การเขียนการพิสูจน์ที่ชัดเจนขึ้นอาจจะต้องใช้วิธีการแสดงรูปเพื่อความชัดเจนมากยิ่งขึ้นประกอบกันได้

7.2. ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

7.2.1 ยังมีปัญหาอื่นที่สัมพันธ์กับทฤษฎีการปรากฏค่าของกราฟพารามิเตอร์ คือปัญหาการหาค่าสุดขีดของกราฟพารามิเตอร์ (Extremal Problem) นั่นก็คือปัญหาการหาค่าขอบเขตของกราฟพารามิเตอร์บนคลาสที่กำหนด จากงานวิจัยครั้งนี้สามารถต่อยอดในการทำงานวิจัยในการหาค่าขอบเขตของลิเนียร์อาร์บอริซิตี้ ลิเนียร์ k อาร์บอริซิตี้บนคลาสของกราฟอย่างง่ายและกราฟเชื่อมโยงที่มี m เส้น และ n จุด โดยการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างในเทอมของจำนวนจุดจำนวนเส้นของกราฟ

7.2.2 นักวิจัยสามารถทำการวิจัยโดยการพิจารณาเพียงกราฟพารามิเตอร์เดียวบนคลาสของกราฟโดยการพิจารณาเป็น 2 ประเด็นคือ การพิจารณาว่ากราฟพารามิเตอร์นั้นเป็นกราฟพารามิเตอร์ที่ปรากฏทุกค่าบนคลาสของกราฟที่พิจารณาหรือไม่ และการศึกษาปัญหาค่าขีดสุดของกราฟพารามิเตอร์บนคลาสของกราฟที่พิจารณา

8. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ศุภวัจน์ อัครสัมฤทธิ์ ผู้เป็นที่ปรึกษาตลอดการดำเนินการวิจัย ณาจารย์หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (วท.บ.) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ เจ้าหน้าที่ และบุคลากรของคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม ที่ให้การช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ ในการดำเนินงานวิจัยจนงานวิจัยสำเร็จด้วยดี ทำได้ดีที่สุด ขอขอบพระคุณอธิการบดี รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการและวิจัย ผู้อำนวยการสถาบันวิจัยและการพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม ที่ให้ทุนสนับสนุนในการทำงานวิจัย และให้คำชี้แนะที่เป็นประโยชน์ในการทำวิจัย

9. เอกสารอ้างอิง

- [1] G. Chartrand, "The theory and application of graphs," in *The Fourth International Conference on the Theory and Application of graphs*, Western Michigan University, Kalamazoo, Michigan, May 6-8, 1980.
- [2] N. Punnim, "Degree Sequences and Chromatic Numbers of Graphs," *Graphs and Combinatorics*, Vol. 18, no. 3, pp. 597-603, October 2002.
- [3] N. Punnim, "The Clique Numbers of Regular Graphs," *Graphs and Combinatorics*, Vol. 18, no. 4, pp. 781-785, December 2002.
- [4] N. Punnim, "On Maximum Induced Forests in Graphs," *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, Vol. 27, no. 4, pp. 667-674, October 2003.
- [5] N. Punnim, "The Matching Number of Regular Graphs," *Thai Journal of Mathematics*, Vol. 2, no. 1, pp. 133-140, January 2004.
- [6] N. Punnim, "Interpolation Theorems on Graph Parameters," *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, Vol. 28, no. 3, pp. 533-538, January 2004.
- [7] N. Punnim, "Interpolation Theorems in Jump Graphs," *Australasian Journal of Combinatorics*, Vol. 39, no. 1, pp. 103-111, January 2007.
- [8] A. Chaemchan, "Bounds on the Arboricities of Connected Graphs," *Australasian Journal of Combinatorics*, Vol. 49, pp. 209-215, February 2011.
- [9] A. Chantasartassmee and N. Punnim, "An Intermediate Value Theorem for the Arboricities," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 2011, no. 1, pp. 1-7, June 2011.
- [10] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, London: Macmillan, 1976.
- [11] C. S. J. Nash-Williams, "Edge-disjoint Spanning Trees of Finite Graphs," *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 1, no. 1, pp. 445-450, December 1961.