



เสถียรภาพสำหรับแบบจำลองโรคระบาด เอส อี ไอ อาร์ และ เอส อี ไอ คิว อาร์

On the stability for SEIR and SEIQR epidemic model

สลิทธิพงษ์ แดงกองโค^{1*} ยุทธนา อุดทา¹ และ จิตติพร ตั้งควิเวชกุล¹

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

อำเภอเมืองพิษณุโลก จังหวัดพิษณุโลก 65000

*E-mail: dsalinthip@psru.ac.th

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาแบบจำลองโรคระบาด เอส อี ไอ อาร์ และ เอส อี ไอ คิว อาร์ และหาจุดสมดุลของแบบจำลองทั้งสอง ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรคและจุดสมดุลที่มีเชื้อโรค ยิ่งไปกว่านั้นจุดสมดุลทั้งสองยังได้ถูกพิจารณาเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่ด้วย

คำสำคัญ: แบบจำลองโรคระบาด จุดสมดุล เสถียรภาพกำกับเฉพาะที่ เมทริกซ์เฮอริวิทซ์

Abstract

In this paper, the SEIR and SEIQR epidemic model are considered and found the equilibrium points, disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point. Furthermore, each equilibrium point is also proved the locally asymptotically stable.

Keywords: Epidemic model, Equilibrium point, Locally asymptotically stable, Hurwitz matrix

Received: July 10, 2019

Revised: December 07, 2019

Accepted: April 22, 2020

1. บทนำ

การศึกษาแบบจำลองโรคระบาด เป็นเรื่องหนึ่งที่น่าสนใจในทางทฤษฎีบทคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับระบาดวิทยา โดยงานวิจัยใน [1] เป็นงานที่ได้รับความสนใจอย่างมากในปี 1979 ซึ่งงานวิจัยของแบบจำลองในอดีตที่ผ่านมา เรื่องของการฟักตัวของโรคไม่ได้ถูกนำมาศึกษา นั่นคือ ในการติดเชื้อครั้งแรกหนึ่งผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (Susceptible) จะเกิดการติดเชื้อ (Infectious) ทันที และหลังจากนั้นจึงหาย (Recover) ด้วยภูมิคุ้มกัน ซึ่งอาจจะมีภูมิคุ้มกันถาวรหรือชั่วคราว จากสมมติฐานที่กล่าวมาจึงทำให้ได้รับแบบจำลอง SIR หรือ SIRS ซึ่งได้ถูกศึกษาใน [2-3] แต่ถึงอย่างไรก็ตาม โรคบางชนิดจะมีช่วงระยะการฟักตัวของโรคในโฮสต์ก่อนที่จะกลายเป็นการติดเชื้อ จึงทำให้ได้มีการขยายแบบจำลอง SIR หรือ SIRS โดยมีการพิจารณาในส่วนของการฟักตัวของโรค ดังนั้นจึงทำให้มีการตั้งสมมติฐานว่าผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อต้องผ่านช่วงที่โรคนี้อ่อนแอแฝงก่อนโดยไม่แสดงอาการ (Expose) แล้วจึงกลายเป็นผู้ที่ติดเชื้อ จึงทำให้ได้รับแบบจำลอง SEIR และ SEIRS ซึ่งได้ถูกศึกษาใน [4-6] แต่ไม่เพียงเท่านั้น เมื่อพิจารณาถึงการติดเชื้อของโรค อีกสิ่งหนึ่งที่น่าสนใจในการพิจารณาคือการควบคุมการแพร่กระจายของโรค โดยสังเกตเห็นว่าถ้ามีการแยกผู้ที่ติดเชื้อในระดับที่ติดต่อกันไปยังผู้อื่นได้ในช่วงเวลานึง จะเป็นสิ่งที่ใช้ในการควบคุมการแพร่กระจายของโรคได้ ซึ่งประชากรในกลุ่มนี้จะถูกเรียกว่า ผู้ถูกกักกัน (Quarantine) โดยมีความหมายถึง ขั้นตอนการแยกหรือการหยุดการมีปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นนั้นจะช่วยให้การแพร่กระจายของโรคลดลง ดังนั้นเมื่อพิจารณาสมมติฐานที่กล่าว

มาจะทำให้ได้รับแบบจำลอง SEIQR หรือ SEIQRS ซึ่งได้ถูกศึกษาใน [7-8]

ด้วยเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้น ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาแบบจำลอง เอส อี ไอ อาร์ และ เอส อี ไอ คิว อาร์ โดยได้หาจุดสมดุลของโรค ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค และจุดสมดุลที่มีเชื้อโรค รวมถึงการวิเคราะห์เสถียรภาพกำกับเฉพาะที่ ณ จุดสมดุลดังกล่าว

2. ความรู้พื้นฐาน

[9] พิจารณาระบบสมการไม่เชิงเส้น ต่อไปนี้

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t); x(t_0) = x_0, t \geq t_0 \quad \text{----(1)}$$

ซึ่ง $t_0 \geq 0$

เราจะเรียก t_0 ว่าเวลาเริ่มต้น (The initial time) และ $x: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ จะถูกเรียกว่าแนววิถี (State trajectory) โดยที่ $x(t_0)$ คือสถานะเริ่มต้น (Initial state) และ $f: \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ไม่เชิงเส้น โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้าส่วนประกอบของ x และ f ถูกเขียนแทนด้วย

$$x = [x_1 \dots x_n]^T \text{ และ } f = [f_1 \dots f_n]^T$$

แล้วระบบสมการ (1) จะถูกเรียกว่าไม่อิสระ (Non-autonomous) หรือ ระบบการแปรเปลี่ยนของเวลา (Time-varying system) สำหรับกรณีที่ระบบสมการเชิงเส้น

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad \text{----(2)}$$

ซึ่ง $A(t)$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัส n มิติ จะเป็นกรณีเฉพาะของระบบสมการ (1) โดยที่

$$f(x(t), t) = A(t)x(t)$$

ถ้าเวลา t ไม่ปรากฏชัดแจ้งในฟังก์ชัน f แล้วระบบสมการ (1) จะถูกลดรูปไปเป็น

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{----(3)}$$

ดังนั้นระบบพลวัตของ (3) จะถูกเรียกว่าอิสระ (Autonomous) หรือระบบไม่แปรเปลี่ยนของเวลา (Time-invariant system) เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ระบบสมการ (1) และ (3) สามารถเขียนในรูปอย่างง่ายได้เป็น

$$\dot{x}(t) = f(x, t)$$

และ

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad \text{ตามลำดับ}$$

บทนิยาม 1 [9] จุดสมดุล (Equilibrium point) ของระบบสมการ (1) คือ $x = x_e$ เมื่อ x_e คือเวกเตอร์คงตัว (Constant vector) ที่ทำให้ $f(x_e, t) = 0, 0 \leq t_0 \leq \forall t$

บทนิยาม 2 [10] กำหนดให้ $p = (p_1, p_2)$ เป็นจุดสมดุลของระบบสมการไม่เชิงเส้น

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad \text{-----(4)}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad \text{-----(5)}$$

และสมมติให้ f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง เมื่อกระจายทางขวาของสมการ (4) และ (5) ด้วยอนุกรมเทเลอร์รอบจุด (p_1, p_2) จะได้ว่า

$$\dot{x}_1 = f_1(p_1, p_2) + a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2) + \text{H.O.T.}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(p_1, p_2) + a_{21}(x_1 - p_1) + a_{22}(x_2 - p_2) + \text{H.O.T.}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}, \\ a_{12} &= \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}, \\ a_{21} &= \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}, \\ a_{22} &= \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2} \end{aligned}$$

และ H.O.T. ใช้แทน พจน์อันดับสูงกว่าของการกระจาย นั่นคือ พจน์ที่อยู่ในรูปของ $(x_1 - p_1)^2$,

$(x_2 - p_2)^2, (x_1 - p_1) \times (x_2 - p_2)$ และอื่น ๆ เนื่องจากจาก (p_1, p_2) คือจุดสมดุล จะได้ว่า

$$f_1(p_1, p_2) = f_2(p_1, p_2) = 0$$

ยิ่งไปกว่านั้น เนื่องจากเราสนใจแนววิถีใกล้จุดสมดุล (p_1, p_2) เราจึงกำหนดให้

$$y_1 = x_1 - p_1 \text{ และ } y_2 = x_2 - p_2$$

เขียนสมการใหม่ ได้เป็น

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \text{H.O.T.}$$

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \text{H.O.T.}$$

ถ้าเราสนใจที่ย่านใกล้เคียงที่เล็กพอของจุดสมดุล ซึ่งพจน์อันดับสูงกว่ามีค่าน้อยมาก ๆ ดังนั้นเราอาจลดพจน์เหล่านี้และประมาณค่าของสมการไม่เชิงเส้นด้วยสมการเชิงเส้น ดังนี้

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$\dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

เขียนสมการใหม่ในรูปแบบเวกเตอร์ ได้ดังนี้

$$\dot{y} = Ay$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{x=p} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=p}$$

เมทริกซ์ $[\partial f / \partial x]$ เรียกว่า เมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix) ของ $f(x)$ และ A คือค่าของเมทริกซ์จาโคเบียน ณ จุดสมดุล p ซึ่งพฤติกรรมของระบบสมการไม่เชิงเส้นที่ใกล้กับจุดสมดุลสามารถที่จะกำหนดผ่านความเชิงเส้นซึ่งสอดคล้องกับจุดสมดุลนั้น โดยในที่นี้เราจะให้สัญลักษณ์ $J(p)$ แทนเมทริกซ์จาโคเบียน ณ จุดสมดุล p ยิ่งไปกว่านั้นใน [11] ระบบสมการที่ประกอบด้วย k ตัวแปร และ k สมการ

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

โดยที่ $f_1, f_2, \dots, f_k$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง และสามารถประมาณค่าของสมการไม่เชิงเส้นด้วยสมการเชิงเส้น ดังนี้

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1k}y_k$$

$$\dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2k}y_k$$

$$\vdots$$

$$\dot{y}_k = a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \dots + a_{kk}y_k$$

เมื่อ $y_1 = x_1 - p_1, y_2 = x_2 - p_2, \dots, y_k = x_k - p_k$ จึงทำให้ได้เมทริกซ์จาโคเบียนของระบบสมการดังกล่าว ณ จุดสมดุล $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ คือ

$$J(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ จากระบบสมการเชิงเส้น (2) พิจารณาโดยบทนิยาม 2 จึงสามารถเขียนได้ว่า

$$\dot{x} = Ax \quad \text{----(6)}$$

เมื่อ A คือค่าของเมทริกซ์จาโคเบียน ณ จุดสมดุล p ดังบทนิยาม 2

ทฤษฎีบท 3 [12] ให้ x_e เป็นจุดสมดุลของระบบสมการ (1) และ

$$\det(J(x_e) - \lambda I) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = a(\lambda) \quad \text{----(7)}$$

เป็นสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) โดยที่ λ_i เป็นรากลักษณะเฉพาะ (Characteristic root) ของสมการลักษณะเฉพาะ (7) เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ และเมทริกซ์เฮอริวิตซ์ (Hurwitz matrix) ขนาด $n \times n$ ของสมการลักษณะเฉพาะ $a(\lambda)$ ในสมการ (7) คือ

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2n-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

โดยที่ $a_r = 0$ สำหรับ $r > n$ ดังนั้นทุกรากของสมการลักษณะเฉพาะ $a(\lambda)$ มีค่าของส่วนจริงเป็นลบก็ต่อเมื่อ $H_i > 0$ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, \dots, n$ โดยที่ H_i คือไมเนอร์สำคัญแบบเรียง (Leading principal minor) ลำดับที่ i ของเมทริกซ์ H

ทฤษฎีบท 4 [12] ระบบสมการ (6) จะเสถียรภาพกำกับ (Asymptotically stable) ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์เสถียร นั่นคือ $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ สำหรับทุก i และถ้าระบบสมการ (6) ไม่เสถียร (Unstable) จะมี $\text{Re}(\lambda_i) > 0$

3. ผลการวิจัย

3.1 แบบจำลองโรคระบาด เอส อี ไอ อาร์

ต่อไปนี้จะใช้สัญลักษณ์

S แทน กลุ่มของ $S(t)$ เมื่อ $S(t)$ คือ จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลา t ใด ๆ

E แทน กลุ่มของ $E(t)$ เมื่อ $E(t)$ คือ จำนวนของผู้ที่มีเชื้อแฝงแต่ยังไม่แสดงอาการ ณ เวลา t ใด ๆ

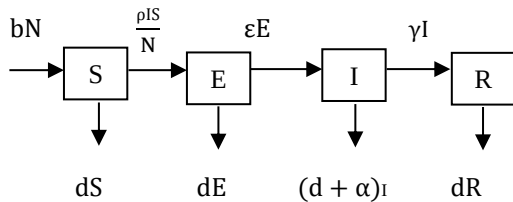
I แทน กลุ่มของ $I(t)$ เมื่อ $I(t)$ คือ จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อ ณ เวลา t ใด ๆ

Q แทน กลุ่มของ $Q(t)$ เมื่อ $Q(t)$ คือ จำนวนของผู้ถูกกักกัน ณ เวลา t ใด ๆ

และ R แทน กลุ่มของ $R(t)$ เมื่อ $R(t)$ คือ จำนวนของผู้ที่หายจากการติดเชื้อ ณ เวลา t ใด ๆ

ในงานวิจัยนี้เราได้ขยายการศึกษาแบบจำลองโรคระบาด เอส อี ไอ อาร์ ของ [4] ซึ่งเราจะศึกษาเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่ของจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค และเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่ของจุดสมดุลที่มีเชื้อโรคโดยการพิจารณารากลักษณะเฉพาะจากสมการลักษณะเฉพาะ โดยแบบจำลองโรคระบาด เอส อี ไอ อาร์ ได้ถูกศึกษาภายใต้สมมติฐานว่าจำนวนของประชากรทั้งหมด ณ เวลา t ใด ๆ คือ $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ และจำนวนของ

ประชากรที่ติดเชื้อทั้งหมด ณ เวลา t ใด ๆ คือ $E(t) + I(t)$ และสร้างแผนภาพแบบจำลองโรคระบาด เอส อี ไอ อาร์ ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 แบบจำลองโรคระบาด เอส อี ไอ อาร์

โดยที่ทุกพารามิเตอร์ต่อไปนี้มีความหมาย

b คือ อัตราของประชากรที่เข้ามาในระบบ
เป็นประชากรเสี่ยงต่อการติดเชื้อ

d คือ อัตราการตายตามธรรมชาติ

ρ คือ อัตราการติดเชื้อ

ϵ คือ อัตราของผู้ที่ติดเชื้อแต่ยังไม่แสดง

อาการ กลายไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อและแสดงอาการ

γ คือ อัตราการหายจากการติดเชื้อ

α คือ อัตราการตายที่เกิดจากการติดเชื้อ

จากแผนภาพการแพร่กระจายของเชื้อโรคนำไปสู่
แบบจำลองของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= bN - \frac{\rho IS}{N} - dS \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\rho IS}{N} - (\epsilon + d)E \\ \frac{dI}{dt} &= \epsilon E - (\gamma + d + \alpha)I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - dR\end{aligned}\quad \text{----(SEIR)}$$

เราพิจารณาหาจุดสมดุลของระบบสมการ (SEIR) โดยเริ่มจากการพิจารณาหาจุดสมดุล ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค เขียนแทนด้วย P_0 นั่นคือพิจารณาระบบสมการ (SEIR) เมื่อ $I = 0$ ทำให้ได้ว่า $P_0 = (\frac{bN}{d}, 0, 0, 0)$ ซึ่งจากการศึกษาใน [4] ได้ว่า $P_0 = (1, 0, 0)$ เป็นเพียงกรณีหนึ่งของเราเท่านั้น นั่นคือเมื่อ $bN = d$ และเมื่อเราพิจารณาหาจุดสมดุลที่มีเชื้อโรค

ของระบบสมการ (SEIR) เขียนแทนด้วย P^* ทำให้ได้ว่า $P^* = (S^*, E^*, I^*, R^*)$

เมื่อ

$$\begin{aligned}S^* &= \frac{NbR_q^{-1}}{d} \\ E^* &= \left(\frac{d(\gamma + d + \alpha)}{\epsilon\rho} \right) (N(R_q - 1)) \\ I^* &= \frac{dN(R_q - 1)}{\rho} \\ R^* &= \frac{\gamma N}{\rho} (R_q - 1)\end{aligned}$$

เมื่อ $R_q = \frac{(\epsilon\rho)b}{d(\epsilon+d)(\gamma+d+\alpha)}$ และ R_q หมายถึง ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน และยิ่งไปกว่านั้นจะเห็นว่าจุดสมดุล P^* จะเกิดขึ้นได้ เมื่อ $R_q > 1$

ทฤษฎีบท 1 ถ้า P_0 เป็นจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรคของระบบสมการ (SEIR) และ $R_q < 1$ แล้วความสมดุล ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรคของระบบสมการ (SEIR) จะมีเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่

พิสูจน์ เราพิจารณาสมการ

$$\begin{aligned}F_1 &= bN - \frac{\rho IS}{N} - dS \\ F_2 &= \frac{\rho IS}{N} - (\epsilon + d)E \\ F_3 &= \epsilon E - (\gamma + d + \alpha)I \\ F_4 &= \gamma I - dR\end{aligned}$$

จะได้เมทริกซ์จาโคเบียน ณ จุดสมดุลใด ๆ คือ

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\rho I}{N} - d & 0 & -\frac{\rho S}{N} & 0 \\ \frac{\rho I}{N} & -(\epsilon + d) & \frac{\rho S}{N} & 0 \\ 0 & \epsilon & -(\gamma + d + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -d \end{bmatrix}$$

เราพิจารณา ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค นั่นคือแทนค่า

$P_0 = (\frac{bN}{d}, 0, 0, 0)$ ลงในเมทริกซ์จาโคเบียน จึงได้ว่า

$$J(P_0) = \begin{bmatrix} -d & 0 & -\frac{\rho b}{d} & 0 \\ 0 & -(\epsilon + d) & \frac{\rho b}{d} & 0 \\ 0 & \epsilon & -(\gamma + d + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -d \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ สมการลักษณะเฉพาะ $|J(P_0) - \lambda I| = 0$ ว่า

$$0 = |J(P_0) - \lambda I|$$

$$= \begin{vmatrix} -d - \lambda & 0 & -\frac{\rho b}{d} & 0 \\ 0 & -(\varepsilon + d) - \lambda & \frac{\rho b}{d} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\gamma + d + \alpha) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -d - \lambda \end{vmatrix}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\left((-(\varepsilon + d) - \lambda)(-(d + \alpha + \gamma) - \lambda) - \left(\frac{\varepsilon \rho b}{d} \right) \right) (-d - \lambda)^2 = 0 \quad \text{-----(8)}$$

จาก $d > 0$ จะได้ว่ารากลักษณะเฉพาะของสมการ (8) มีสองค่าซึ่งส่วนจริงของรากทั้งสองมีค่าเป็นลบ ดังนั้นจึงเหลือการพิจารณารากลักษณะเฉพาะของ

$$(-(\varepsilon + d) - \lambda)(-(d + \alpha + \gamma) - \lambda) - \left(\frac{\varepsilon \rho b}{d} \right)$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} & (-(\varepsilon + d) - \lambda)(-(d + \alpha + \gamma) - \lambda) - \left(\frac{\varepsilon \rho b}{d} \right) \\ &= (\varepsilon + d)(d + \alpha + \gamma) + (\varepsilon + d)\lambda \\ &\quad + (d + \alpha + \gamma)\lambda + \lambda^2 - \left(\frac{\varepsilon \rho b}{d} \right) \\ &= \lambda^2 + ((\varepsilon + d) + (d + \alpha + \gamma))\lambda \\ &\quad + ((\varepsilon + d)(d + \alpha + \gamma) - \left(\frac{\varepsilon \rho b}{d} \right)) \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าพิจารณา

$$\lambda^2 + ((\varepsilon + d) + (d + \alpha + \gamma))\lambda + ((\varepsilon + d)(d + \alpha + \gamma) - \left(\frac{\varepsilon \rho b}{d} \right)) = 0$$

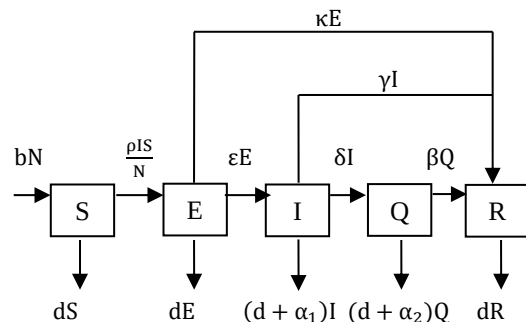
จะเห็นว่ารากลักษณะเฉพาะสองค่าของสมการนี้มี ส่วนจริงเป็นลบ ถ้า

$$(\varepsilon + d)(d + \alpha + \gamma) > \left(\frac{\varepsilon \rho b}{d} \right)$$

นั่นคือ $R_q < 1$ จึงสรุปได้ว่าจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค P_0 ของระบบสมการ (SEIR) มีเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่ $\square$

จากการศึกษาแบบจำลองโรกระบาด (SEIR) เราจะเห็นได้ว่าการติดต่อของโรค อีก ส่วนประกอบหนึ่งที่มีความสำคัญนั่นคือ การควบคุมการติดต่อของโรคโดยการแยกผู้ที่ติดเชื้อ

ออก เพื่อไม่ให้เชื้อโรคได้แพร่กระจาย ดังนั้นเราจึง พิจารณาแผนภาพแบบจำลองโรกระบาด เอส อี ไอ คิว อาร์ ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 แบบจำลองโรกระบาด เอส อี ไอ คิว อาร์

โดยที่ทุกพารามิเตอร์ต่อไปนี้มีความหมาย

b คือ อัตราของประชากรที่เข้ามาในระบบเป็น

ประชากรเสี่ยงต่อการติดเชื้อ

d คือ อัตราการตายตามธรรมชาติ

ρ คือ อัตราการติดเชื้อ

ε คือ อัตราของผู้ที่ติดเชื้อแต่ยังไม่แสดงอาการ กลายเป็นผู้ที่ติดเชื้อและแสดงอาการ

κ คือ อัตราของผู้ที่ยังไม่แสดงอาการ กลายเป็นผู้ที่หายจากการติดเชื้อแบบมีภูมิคุ้มกัน

δ คือ อัตราของผู้ที่ติดเชื้อแล้วต้องคัดแยกไป เพื่อควบคุมโรค

γ คือ อัตราของผู้ที่ติดเชื้อแล้วกลายเป็นผู้ที่หายจากการติดเชื้อแบบมีภูมิคุ้มกัน

β คือ อัตราของผู้ที่หายจากการติดเชื้อหลังจาก ถูกแยกกักกันโรค

α_1 คือ อัตราการตายที่เกิดจากการติดเชื้อ

α_2 คือ อัตราการตายที่เกิดจากการติดเชื้อ ในขณะที่ถูกคัดแยก

ดังนั้นจากแบบจำลอง SEIQR เราจึงได้ แบบจำลองของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= bN - \frac{\rho IS}{N} - dS \\
\frac{dE}{dt} &= \frac{\rho IS}{N} - (\kappa + \varepsilon + d)E \\
\frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (\gamma + \delta + d + \alpha_1)I \\
\frac{dQ}{dt} &= \delta I - (\beta + d + \alpha_2)Q \\
\frac{dR}{dt} &= \beta Q + \gamma I + \kappa E - dR
\end{aligned}
\quad \text{-----(SEIQR)}$$

เมื่อ $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$

เมื่อเราพิจารณาหาจุดสมดุล ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรคของ (SEIQR) เขียนแทนด้วย $\tilde{P}_0$ ได้ว่า

$\tilde{P}_0 = (\frac{bN}{d}, 0, 0, 0, 0)$ และจุดสมดุลที่มีเชื้อโรค เขียนแทนด้วย $\tilde{P}^*$ ได้ว่า $\tilde{P}^* = (\tilde{S}^*, \tilde{E}^*, \tilde{I}^*, \tilde{Q}^*, \tilde{R}^*)$ เมื่อ

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^* &= \frac{bNR_q^{-1}}{d} \\
\tilde{E}^* &= \frac{dN(\gamma + \delta + d + \alpha_1)(\tilde{R}_q - 1)}{\varepsilon\rho} \\
\tilde{I}^* &= \frac{dN(\tilde{R}_q - 1)}{\rho} \\
\tilde{Q}^* &= \frac{\delta dN(\tilde{R}_q - 1)}{\rho(\beta + d + \alpha_2)} \\
\tilde{R}^* &= \frac{dN(\beta\delta + (\beta + d + \alpha_2)(\gamma + \delta + d + \alpha_1)\kappa + (\beta + d + \alpha_2)\gamma)(\tilde{R}_q - 1)}{\rho(\beta + d + \alpha_2)}
\end{aligned}$$

เมื่อ $\tilde{R}_q = \frac{(\varepsilon\rho)b}{d(\varepsilon + d + \kappa)(\gamma + \delta + d + \alpha_1)}$ และจุดสมดุล $\tilde{P}^*$ จะเกิดขึ้นได้ เมื่อ $\tilde{R}_q > 1$

ต่อจากนี้เราจะพิจารณาเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่ ณ จุดสมดุล $\tilde{P}_0$ และ $\tilde{P}^*$ จึงทำให้ได้รับทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $\tilde{P}_0$ เป็นจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรคของระบบสมการ (SEIQR) และ $\tilde{R}_q < 1$ แล้วความสมดุล ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรคของระบบสมการ (SEIQR) จะเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่

พิสูจน์ เราพิจารณาสมการ

$$\begin{aligned}
F_1 &= bN - \frac{\rho IS}{N} - dS \\
F_2 &= \frac{\rho IS}{N} - (\kappa + \varepsilon + d)E \\
F_3 &= \varepsilon E - (\gamma + \delta + d + \alpha_1)I \\
F_4 &= \delta I - (\beta + d + \alpha_2)Q
\end{aligned}$$

$$F_5 = \beta Q + \gamma I + \kappa E - dR$$

จะได้เมทริกซ์จาโคเบียน ณ จุดสมดุลใด ๆ คือ

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\rho I}{N} - d & 0 & -\frac{\rho S}{N} & 0 & 0 \\ \frac{\rho I}{N} & -\varphi & \frac{\rho S}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu & 0 \\ 0 & \kappa & \gamma & \beta & -d \end{bmatrix}$$

เราพิจารณา ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค $\tilde{P}_0$ นั่นคือแทนค่า $\tilde{P}_0 = (\frac{bN}{d}, 0, 0, 0, 0)$ ลงในเมทริกซ์จาโคเบียน จึงได้ว่า

$$J(\tilde{P}_0) = \begin{bmatrix} -d & 0 & -\frac{\rho b}{d} & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi & \frac{\rho b}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu & 0 \\ 0 & \kappa & \gamma & \beta & -d \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
\varphi &= \kappa + \varepsilon + d \\
\tau &= \gamma + \delta + d + \alpha_1 \\
\mu &= \beta + d + \alpha_2
\end{aligned}$$

ทำให้ได้สมการลักษณะเฉพาะ $|J(\tilde{P}_0) - \lambda I| = 0$ ว่า

$$\begin{aligned}
0 &= |J(\tilde{P}_0) - \lambda I| \\
&= \begin{vmatrix} -d - \lambda & 0 & -\frac{\rho b}{d} & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi - \lambda & \frac{\rho b}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\tau - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & \kappa & \gamma & \beta & -d - \lambda \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
&(-d - \lambda)(-d - \lambda)(-\mu - \lambda) \\
&\left[(-\varphi - \lambda)(-\tau - \lambda) - \frac{\rho b \varepsilon}{d}\right] = 0 \quad \text{-----(9)}
\end{aligned}$$

จาก $d > 0$ และ $\mu > 0$ จะได้ว่ารากลักษณะเฉพาะของสมการ (9) มีสามค่าซึ่งส่วนจริงของรากทั้งสามมีค่าเป็นลบ ดังนั้นจึงเหลือการพิจารณารากลักษณะเฉพาะของ

$$(-\varphi - \lambda)(-\tau - \lambda) - \frac{\rho b \varepsilon}{d}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
 (-\varphi - \lambda)(-\tau - \lambda) - \frac{\rho b \varepsilon}{d} \\
 &= \varphi \tau + \varphi \lambda + \tau \lambda + \lambda^2 - \frac{\rho b \varepsilon}{d} \\
 &= \lambda^2 + (\varphi + \tau)\lambda + \left(\varphi \tau - \frac{\rho b \varepsilon}{d}\right)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าพิจารณา

$$\lambda^2 + (\varphi + \tau)\lambda + \left(\varphi \tau - \frac{\rho b \varepsilon}{d}\right) = 0$$

จะเห็นว่ารากลักษณะเฉพาะทั้งสองค่าของสมการนี้มีส่วนจริงเป็นลบ ถ้า $\varphi \tau > \frac{\rho b \varepsilon}{d}$ หรือ $-(\kappa + \varepsilon + d)(\gamma + \delta + d + \alpha_1) > \frac{\rho b \varepsilon}{d}$ นั่นคือ $\tilde{R}_q < 1$ จึงสรุปได้ว่า จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค P_0 ของระบบสมการ (SEIQR) มีเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่ $\square$

ทฤษฎีบท 3 ถ้า P^* เป็นจุดสมดุลที่มีเชื้อโรคของ

ระบบสมการ (SEIQR) และ $\tilde{R}_q > 1$ และ

1. $a_1 > 0$
2. $(a_1 a_2 - a_3) > 0$
3. $a_3(a_1 a_2 - a_3) + a_1(a_5 - a_1 a_4) > 0$
4. $(a_1 a_2 - a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) + (a_1 a_4 - a_5)(a_5 - a_1 a_4) > 0$
5. $a_5[(a_1 a_2 - a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5)] + a_5[(a_1 a_4 - a_5)(a_5 - a_1 a_4)] > 0$

แล้วความสมดุล ณ จุดสมดุลที่มีเชื้อโรคของระบบสมการ (SEIQR) จะเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่

พิสูจน์ เมทริกซ์จาโคเบียน ณ จุดสมดุลที่มีเชื้อโรค P^* นั่นคือ แทนค่า $P^* = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ ลงในเมทริกซ์จาโคเบียนของระบบสมการ (SEIQR) จะได้ว่า

$$J(P^*) = \begin{bmatrix} -\frac{\rho I^*}{N} - d & 0 & -\frac{\rho S^*}{N} & 0 & 0 \\ \frac{\rho I^*}{N} & -\varphi & \frac{\rho S^*}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu & 0 \\ 0 & \kappa & \gamma & \beta & -d \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้สมการลักษณะเฉพาะ $|J(P^*) - \lambda I| = 0$ ว่า

$$\begin{aligned}
 0 &= |J(P^*) - \lambda I| \\
 &= \begin{vmatrix} -\frac{\rho I^*}{N} - d - \lambda & 0 & -\frac{\rho S^*}{N} & 0 & 0 \\ \frac{\rho I^*}{N} & -\varphi - \lambda & \frac{\rho S^*}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\tau - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & \kappa & \gamma & \beta & -d - \lambda \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$0 = \lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5 \quad \text{-----(10)}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (d + \mu) + \left(\frac{\rho I^*}{N} + d\right) + (\varphi + \tau) \\
 a_2 &= \frac{\rho S^* \varepsilon}{N} + d\mu + (d + \mu) \left(\frac{\rho I^*}{N} + d\right) \\
 &\quad + (d + \mu)(\varphi + \tau) + (\varphi + \tau) \left(\frac{\rho I^*}{N} + d\right) + \varphi \tau \\
 a_3 &= d\mu \left(\frac{\rho I^*}{N} + d\right) \\
 &\quad + \left(\frac{\rho S^* \varepsilon}{N} + \varphi \tau\right) \left(\frac{\rho I^*}{N} + d + \mu + d\right) \\
 &\quad + \left(\frac{\rho I^*}{N}\right) \left(\frac{\rho S^* \varepsilon}{N}\right) + (d + \mu)(\varphi + \tau) \left(\frac{\rho I^*}{N} + d\right) \\
 a_4 &= d\mu(\varphi + \tau) \left(\frac{\rho I^*}{N} + d\right) + (d + \mu) \left(\frac{\rho I^*}{N}\right) \left(\frac{\rho S^* \varepsilon}{N}\right) \\
 &\quad + (d + \mu) \left(\frac{\rho I^*}{N} + d\right) \left(\frac{\rho S^* \varepsilon}{N} + \varphi \tau\right) \\
 &\quad + d\mu \left(\frac{\rho S^* \varepsilon}{N} + \varphi \tau\right) \\
 a_5 &= d\mu \left[\left(\frac{\rho I^*}{N}\right) \left(\frac{\rho S^* \varepsilon}{N}\right) + \left(\frac{\rho I^*}{N} + d\right) \left(\frac{\rho S^* \varepsilon}{N} + \varphi \tau\right) \right]
 \end{aligned}$$

จากเมทริกซ์เฮอริวิตซ์ สำหรับ $n = 5$ เนื่องจากสมมติฐานข้อ 1-5 ทำให้ได้ว่าทุกรากลักษณะเฉพาะของสมการ (10) มี $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ จึงสรุปได้ว่าจุดสมดุลที่มีเชื้อโรค P^* ของระบบสมการ (SEIQR) มีเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่ $\square$

หมายเหตุ จากการสร้างแบบจำลอง เอส อี ไอ คิว อาร์ นั้น ถ้าเรากำหนดให้ $\kappa = 0$, $\delta = 0$ และ $\beta = 0$ แล้วแบบจำลองดังกล่าวจะกลับไปเป็นแบบจำลอง เอส อี ไอ อาร์ นั่นเอง

4. สรุปผลการวิจัย

จากงานวิจัยนี้เราได้พิจารณาหาจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค และจุดสมดุลที่มีเชื้อโรค ของแบบจำลองโรคระบาด เอส อี ไอ อาร์ และ เอส อี ไอ คิว อาร์ พร้อมทั้งหาความเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่ของจุดสมดุลเหล่านั้น โดยจะเห็นว่าถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานน้อยกว่า 1 แล้ว แบบจำลองโรคระบาดทั้ง เอส อี ไอ อาร์ และ เอส อี ไอ คิว อาร์ จะมีเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค และถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมากกว่า 1 และสอดคล้องกับเมทริกซ์เฮสส์สำหรับ $n = 5$ นั้น แบบจำลองโรคระบาด เอส อี ไอ คิว อาร์ จะมีเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่ ณ จุดสมดุลที่มีเชื้อโรค นอกจากนี้ถ้าแบบจำลองโรคระบาด เอส อี ไอ คิว อาร์ ให้ $\kappa = 0, \delta = 0$ และ $\beta = 0$ แล้ว จะได้แบบจำลองโรคระบาด เอส อี ไอ อาร์ ซึ่งแนวทางในการวิจัยต่อไปนั้นผู้ที่สนใจอาจคำนึงถึงองค์ประกอบอื่น ๆ ที่มีผลต่อการระบาดของโรค ได้แก่ การณรงค์ให้ความรู้เกี่ยวกับโรค ประชากรนักท่องเที่ยว เป็นต้น

5. เอกสารอ้างอิง

- [1] Anderson R. M. and May R. M. Population biology of infectious diseases I. *Nature*. 1979. 280 : 361-367.
- [2] McCluskey C. C. Complete global stability for an SIR epidemic model with delay-Distributed or discrete. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2010. 11 : 55-59.
- [3] Shulgin B., Stone L. and Agur Z. Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model. *Bulletin of Mathematical Biology*. 1998. 60 : 1123-1148.
- [4] Li M. Y., Graef J. R., Wang L. and Karsai J. Global dynamics of a SEIR model with varying total population size. *Mathematical Biosciences*. 1999. 160 : 191-213.
- [5] Ojo M. M. and Akinpelu F. O. Lyapunov functions and global properties of SEIR epidemic model. *International Journal of Chemistry, Mathematics and Physics*. 2017. 1 : 11-16.
- [6] Wang X., Peng H., Shi B., Jiang D., Zhang S. and Chen B. Optimal vaccination strategy of a constrained time-varying SEIR epidemic model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2018. 67 : 37-48.
- [7] Gerberry D. J. and Milner F. A. An SEIQR model for childhood diseases. *Journal of Mathematical Biology*. 2009. 59 : 535-561.
- [8] Mishra B. K. and Jha N. SEIQRS model for transmission of malicious objects in computer network. *Applied Mathematical Modelling*. 2010. 34 : 710-715.
- [9] Chen Z. and Huang J. *Stabilization and regulation of nonlinear systems a robust and adaptive approach*. Springer, Switzerland. 2015.
- [10] Khalil H. K. *Nonlinear Systems*. 3rd ed. Pearson, London. 2002.

- [11] Leah E. K. *Mathematical Models in Biology*. Random House, New York. 2005.
- [12] Barnett S. and Cameron R. G. *Introduction to mathematical control theory*. 2nd ed. Clarendon press, Oxford. 1985.