



สมการไดโอแฟนไทน์ $36^x + p^y = z^2$ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ

On the Diophantine equation $36^x + p^y = z^2$ where p is a prime number

ศิริจันทร์ เวสารัชชานันท์^{*} วณัฐวิทย์ กุศล¹ ปวันรัตน์ ขาวดารา¹ และ พนธกร ภักสุขพิมล¹

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ศูนย์รังสิต ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12120

*E-mail: sirichan@mathstat.sci.tu.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เพื่อหาผลเฉลย (x, y, z, p) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ ของสมการไดโอแฟนไทน์ $36^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ผลจากการศึกษาพบว่า สมการไดโอแฟนไทน์นี้มีผลเฉลย คือ $(0, 3, 3, 2)$, $(1, 6, 10, 2)$, $(2, 6, 45, 3)$ และ $(k, 1, 6^k + 1, 2 \cdot 6^k + 1)$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ

Abstract

This paper is to find all non-negative integer solutions (x, y, z, p) of the Diophantine equation $36^x + p^y = z^2$ where p is a prime number. The result of this study found that, the Diophantine equation has non-negative integer solutions as follows $(0, 3, 3, 2)$, $(1, 6, 10, 2)$, $(2, 6, 45, 3)$ and $(k, 1, 6^k + 1, 2 \cdot 6^k + 1)$ where k is a non-negative integer.

Keywords: Diophantine equation, non-negative integer solution

Received: January 09, 2019

Revised: July 25, 2019

Accepted: December 07, 2019

1. บทนำ

ในปี ค.ศ.2011 Alongkot Suvarnamani [1] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และพบว่า กรณี $p=2$ มีผลเฉลย x, y, z, p ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ คือ $(2k+1, 2k+1, 2^{k+1})$ หรือ $(2k+3, 2k, 3 \cdot 2^k)$ หรือ $(2k, 2k+3, 3 \cdot 2^k)$ ส่วน p เป็นจำนวนเต็มที่มีผลเฉลยเป็น $(4, 2, 5, 3)$ และยังพบว่ายังมี $(x, y, z) = (3, 0, 3)$ เป็นผลเฉลยสำหรับกรณี $y=0$ ส่วนถ้า $y>0$ แล้วผลเฉลยจะอยู่ในรูป $(2k, 1, 1+2^k, 1+2^{k+1})$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ

ปี ค.ศ. 2012 Somchit Chotchisthit [2] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ผลจากการศึกษาพบว่า ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ x, y, z เป็นดังนี้ ถ้า $p=2$ ผลเฉลยอยู่ในรูป $(r, 2r+3, 3 \cdot 2^r)$ ส่วนกรณี p เป็นจำนวนเต็มที่มีผลเฉลย คือ $(2, 2, 5, 3)$ หรือ $(r, 1, 2^r+1, 2^{r+1}+1)$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ

ในงานวิจัยนี้เราได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์

$$36^x + p^y = z^2 \quad (1)$$

เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็นสองกรณี คือ กรณี p เป็นจำนวนเต็มคู่ และกรณี p เป็นจำนวนเต็มคี่ ซึ่งผลการศึกษพบว่า (1) มีเพียงสองผลเฉลยสำหรับกรณี p เป็นจำนวนเต็มคู่ ส่วนกรณี p เป็นจำนวนเต็มคี่ พบว่า (1) มีหลายผลเฉลย

2. ความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญซึ่งนำมาใช้ในงานวิจัยนี้ ได้แก่ ข้อคาดการณ์คาตาลัน (Catalan's conjecture) ซึ่ง Mihailescu ได้ทำการพิสูจน์ไว้ในปี ค.ศ.2004

ทฤษฎีบท 2.1 ข้อคาดการณ์คาตาลัน (Catalan's conjecture) [3] กล่าวว่า ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการ $x^u - y^v = 1$ โดยที่ $x, y > 0$ และ $u, v > 1$ คือ $x = y = 3$ และ $y = u = 2$

3. ผลการวิจัย

สำหรับการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ (1) เราแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ได้แก่ กรณี p เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นจำนวนเต็มคู่ หรือ $p=2$ ซึ่งได้แสดงไว้ในทฤษฎีบท 3.1 และกรณีที่สองคือ p เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นจำนวนเต็มคี่ นั่นคือ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3 โดยได้แสดงไว้ในทฤษฎีบท 3.2

ทฤษฎีบท 3.1 ผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ ของสมการไดโอแฟนไทน์ (1) เมื่อ $p=2$ คือ $(0, 3, 3)$ และ $(1, 6, 10)$

พิสูจน์

แทน $p=2$ ลงใน (1) จะได้

$$36^x + 2^y = z^2 \quad (2)$$

แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1 ถ้า $y=0$ แล้วจาก (2) จะได้ $36^x + 1 = z^2$ หรือ $z^2 - 36^x = 1$ โดยทฤษฎีบท 2.1 ได้ว่า (2) ไม่มีผลเฉลย จึงสรุปได้ว่าสำหรับกรณีนี้ (1) ไม่มีผลเฉลย

กรณี 2 ถ้า $y > 0$ จาก (2) จะได้

$$2^y = z^2 - 36^x = (z+6^x)(z-6^x)$$

ทำให้ได้ว่า $2^\alpha = z+6^x$ และ $2^\beta = z-6^x$ สำหรับบางจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ α และ β ที่ $\alpha + \beta = y$ และ $\alpha > \beta \geq 0$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 2^{x+1} \cdot 3^x &= 2 \cdot 6^x \\ &= (z+6^x) - (z-6^x) \\ &= 2^\alpha - 2^\beta \\ &= 2^{y-\beta} - 2^\beta \\ &= 2^\beta (2^{y-2\beta} - 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$2^{x+1} \cdot 3^x = 2^\beta (2^{y-2\beta} - 1) \quad (3)$$

ถ้า $x=0$ แล้ว $\beta=1$ และ $y=3$ ซึ่งทำให้ $z=3$ ดังนั้นผลเฉลยของ (1) สำหรับกรณีนี้ คือ $(x,y,z) = (0,3,3)$ ในทำนองเดียวกันจาก (3) ถ้า $x=1$ แล้ว $\beta=2$ และ $y=6$ จึงได้ $z=10$ ดังนั้นผลเฉลยของ (1) เมื่อ $x=1$ และ $y > 0$ คือ $(x,y,z) = (1,6,10)$ ถ้า $x > 1$ จะได้ $2^\beta = 2^{x+1}$ และ $3^x = 2^{y-2\beta} - 1$ จึงได้ว่า $\beta = x+1$ และ

$$2^{y-2\beta} - 3^x = 1 \quad (4)$$

โดยทฤษฎีบท 2.1 จึงได้ว่า (4) ไม่มีผลเฉลย จึงสรุปได้ว่าสำหรับกรณี 2 พบว่า (1) มีผลเฉลย x,y,z,p ทั้งหมดสองผลเฉลย ได้แก่ $(0,3,3,2)$ และ $(1,6,10,2)$

ทฤษฎีบท 3.2 ผลเฉลย (x,y,z,p) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ ของสมการไดโอแฟนไทน์ (1) เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3 ได้แก่ $(2,6,45,3)$ และ $(k,1,6^k+1,2 \cdot 6^k+1)$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ และ $2 \cdot 6^k+1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

พิสูจน์

จาก (1) ถ้า $y=0$ แล้ว $36^x+1=z^2$ ไม่มีผลเฉลยให้ $y > 0$ จาก (1) จะได้ว่า

$$p^y = z^2 - 36^x = (z+6^x)(z-6^x)$$

ถ้า $y=1$ แล้วเราได้ว่า $p=(z+6^x)(z-6^x)$ ซึ่งทำให้ $p=z+6^x$ และ $1=z-6^x$ ดังนั้น $z=6^x+1$ และ $p=2 \cdot 6^x+1$ ทำให้ได้ว่าผลเฉลยของ (1) คือ $(x,y,z,p) = (k,1,6^k+1,2 \cdot 6^k+1)$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k ที่ไม่เป็นจำนวนลบ และ $2 \cdot 6^k+1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่างผลเฉลยที่สอดคล้องกับ (1) และอยู่ในรูป $(k,1,6^k+1,2 \cdot 6^k+1)$ ได้แก่

$$x=0, z=2 \text{ และ } p=3$$

$$x=1, z=7 \text{ และ } p=13$$

$$x=2, z=37 \text{ และ } p=73$$

$$x=3, z=217 \text{ และ } p=433$$

$$x=4, z=1297 \text{ และ } p=2593 \text{ เป็นต้น}$$

ถ้า $y > 1$ เนื่องจาก $p^y = (z+6^x)(z-6^x)$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จึงได้ว่า $p^\alpha = z+6^x$ และ $p^\beta = z-6^x$ สำหรับบางจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ α และ β โดยที่ $\alpha + \beta = y$ และ $\alpha > \beta \geq 0$ ดังนั้น

$$2^{x+1} \cdot 3^x = p^\beta (p^{\alpha-\beta} - 1) \quad (5)$$

ซึ่งทำให้

$$p^\beta = 3^x \text{ และ } p^{\alpha-\beta} - 1 = 2^{x+1}$$

ถ้า $\beta=0$ แล้ว $x=0$ จึงทำให้ $y=1$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\beta > 0$ จาก $p^\beta = 3^x$ ทำให้ได้ $p=3$ และ $\beta=x$ เนื่องจาก $p^{\alpha-\beta} - 1 = 2^{x+1}$ จึงได้ $3^{\alpha-x} - 2^{x+1} = 1$ โดยทฤษฎีบท 2.1 เราพบว่า $x=2$ และ $\alpha=4$ ทำให้ได้ $y=6$ และ $z=45$ ดังนั้นผลเฉลยของ (1) สำหรับกรณีนี้ คือ $(x,y,z,p) = (2,6,45,3)$

บทแทรก 3.3 สมการไดโอแฟนไทน์ $6^x + 2^y = z^2$ มีผลเฉลย (x,y,z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ คือ $(0,3,3)$ และ $(2,6,10)$

พิสูจน์ เป็นผลจากทฤษฎีบท 3.1

บทแทรก 3.4 สมการไดโอแฟนไทน์ $6^x + 3^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ คือ $(0, 1, 2)$ และ $(4, 6, 45)$

พิสูจน์ เป็นผลจากทฤษฎีบท 3.2

บทแทรก 3.5 ผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ ของสมการไดโอแฟนไทน์ $6^x + 13^y = z^2$ และ $6^x + 73^y = z^2$ ได้แก่ $(2, 1, 7)$ และ $(4, 1, 37)$ ตามลำดับ

พิสูจน์ เป็นผลจากทฤษฎีบท 3.2

บทแทรก 3.6 ผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ ของสมการไดโอแฟนไทน์ $6^x + 433^y = z^2$ และ $6^x + 2593^y = z^2$ ได้แก่ $(6, 1, 217)$ และ $(8, 1, 1297)$ ตามลำดับ

พิสูจน์ เป็นผลจากทฤษฎีบท 3.2

4. สรุปผลการวิจัย

จากผลการศึกษาพบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $36^x + p^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z, p) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ เท่ากับ $(0, 3, 3, 2)$ และ $(1, 6, 10, 2)$ ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็น

จำนวนเต็มคู่ ส่วนกรณี p เป็นจำนวนเฉพาะที่ $p \geq 3$ สมการข้างต้นมีผลเฉลยเป็น $(2, 6, 45, 3)$ และ $(k, 1, 6^k + 1, 2 \cdot 6^k + 1)$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k ที่ไม่เป็นจำนวนลบ และ $2 \cdot 6^k + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

5. เอกสารอ้างอิง

- [1] Alongkot Suvamamani. Solutions of Diophantine equation $2^x + p^y = z^2$. Int. J. of Mathematical Science and Applications. 2011. 1(3): 1415-1419.
- [2] Somchit Chotchaisthit. On the Diophantine equation $4^x + p^y = z^2$ where p is a prime number. American Journal of Mathematics and Sciences. 2012. 1(1): 191-193.
- [3] Mihailescu, Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. Journal of Reine Angew. Math. 2004. 572: 167-195.