

อัลกอริทึมของ Dijkstra สำหรับการแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนเครือข่าย ภายใต้ตัวเลขฟัซซี่สี่เหลี่ยมคางหมู

Dijkstra's Algorithm for Solving the Fuzzy Shortest Path Problem on Networks under Trapezoidal Fuzzy Number

ดร.ณิ หันวิสัย

Darunee Hunwisai

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์
Department of Applied Mathematics, Faculty of Science and Technology, Valaya Alongkorn Rajabhat University
under the Royal Patronage, Pathum Thani, Thailand
Corresponding author. Tel. 08 3056 5113, E-mail: darunee.hun@vru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาวิธีการแก้ปัญหาหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบตัวเลขฟัซซี่สี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อค่าใช้จ่ายในการเดินทางมีความไม่แน่นอนหรือมีความคลุมเครือ ผู้วิจัยได้เสนอแนวทางการแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดภายใต้ตัวเลขฟัซซี่สี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal fuzzy number) โดยใช้วิธีใช้เทคนิคการจัดอันดับที่แข็งแกร่ง (Robust ranking technique) ในการหาค่าที่เป็นตัวแทนของตัวเลขฟัซซี่สี่เหลี่ยมคางหมู จากนั้นใช้อัลกอริทึมของ Dijkstra เพื่อหาค่าใช้จ่ายในการเดินทางน้อยที่สุด (เส้นทางที่สั้นที่สุด) ผลการศึกษาพบว่าวิธีที่นำเสนอภายใต้สภาพแวดล้อมที่มีความคลุมเครือ สามารถหาคำตอบที่ถูกต้องและเหมาะสมได้

คำสำคัญ: ปัญหาหาเส้นทางที่สั้นที่สุด อัลกอริทึมของไดคส์ตรา ตัวเลขฟัซซี่ เทคนิคการจัดอันดับที่แข็งแกร่ง

Abstract

This objective of research is to find a solution to the shortest path problem with trapezoidal fuzzy numbers when travel expenses are uncertain or ambiguous. The researcher proposed a solution to the shortest path problem under trapezoidal fuzzy numbers by using the Robust's ranking technique to find representative values of trapezoidal fuzzy numbers. After that, the shortest path was founded using the Dijkstra algorithm. The results of the study showed that this method can find the right answer in an ambiguous environment.

Keywords: Shortest path problems, Dijkstra's algorithm, fuzzy numbers, Robust's ranking-technique

1. บทนำ

ในปัจจุบันการเดินทางไปยังสถานที่ต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นเส้นทางใด จะต้องมีการกำหนดเส้นทางในการเดินทางให้สั้นที่สุดเพื่อที่จะไปถึงยังจุดหมายโดยเร็วที่สุดและที่สำคัญคือจะต้องเสียค่าใช้จ่ายในการเดินทางให้น้อยที่สุด โดยเฉพาะอย่างยิ่งภาคการขนส่งที่ต้องการจะลดต้นทุนในการขนส่งสินค้าให้น้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุด (Shortest path problem) เป็นปัญหาหนึ่งในทฤษฎีกราฟที่ต้องการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในการเดินทางในโครงสร้างข้อมูลแบบกราฟระหว่างจุดยอดต้นทาง a และจุดยอดปลายทาง z โดยจะระบุตัวเลขที่แสดงน้ำหนักบนเส้นทางที่เชื่อมจุดยอดสองจุดใด ๆ ในกราฟซึ่งอาจเป็นตัวเลขแสดงระยะทาง เวลา หรือค่าใช้จ่ายในการเดินทาง เป็นต้น ในปัจจุบันจะพบว่ามีหลายสถานการณ์ที่จำเป็นต้องค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุด เช่น การกำหนดเส้นทางของการขนส่งสินค้าเพื่อลดต้นทุนการใช้เวลาในการเดินทางให้น้อยที่สุด การจ่ายเงินในการเดินทางที่น้อยที่สุด เป็นต้น ซึ่งการแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุด ข้อมูลที่จะนำมาแก้ปัญหานี้จะต้องเป็นข้อมูลที่มีความแน่นอนแม่นยำ จึงจะส่งผลให้การตัดสินใจเป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตาม ในการใช้งานจริงส่วนใหญ่ข้อมูลที่ได้มีความคลุมเครือหรือมีความไม่แน่นอน เช่น ความไม่แน่นอนของค่าใช้จ่ายในการขนส่งหรือในการเดินทางอาจเนื่องมาจากสภาพการจราจร สภาพอากาศ ความผันผวนของราคาน้ำมัน และระยะทางของการขนส่ง เป็นต้น จึงอาจถือได้ว่าข้อมูลมีความคลุมเครือ ในกรณีเช่นนี้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบเดิมไม่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้ การหาเส้นทางที่เหมาะสมที่สุดภายใต้สภาวะการณ์ที่

ไม่แน่นอนหรือมีความคลุมเครือจึงได้รับความสนใจจากนักวิจัยเป็นอย่างมาก จากงานวิจัยที่ผ่านมา นักวิจัยได้แก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กล่าวมาข้างต้นโดยใช้แนวคิดของ Bellman RE และ Zadeh LA [1] ซึ่งเป็นการตัดสินใจในสภาพแวดล้อมที่คลุมเครือหรือที่เรียกว่าฟัซซี่ นักวิจัยจำนวนมากได้ให้ความสนใจในการศึกษาวิธีการจัดการกับปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่ คนแรกที่กล่าวถึงปัญหานี้คือ Dubois D และ Prade H [2] ได้นำเสนออัลกอริทึมสำหรับปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่ ซึ่งเป็นการดัดแปลงอัลกอริทึมแบบคลาสสิก Ford Moore Bellman หลังจากนั้นได้มีนักวิจัยได้ให้ความสนใจและศึกษาในประเด็นดังกล่าวเพิ่มมากขึ้น Takahashi MT และ Yamakami A [3] ได้นำเสนอการแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดเมื่อข้อมูลเป็นพารามิเตอร์แบบฟัซซี่ และได้ขยายวิธีของ Okada S [4] และนำเสนออัลกอริทึมทางพันธุกรรมเพื่อใช้ในการประมาณค่าผลลัพธ์สำหรับปัญหาที่ขนาดของพารามิเตอร์มีขนาดใหญ่ขึ้นได้ Nayeem SMA และ Pal M [5] ได้ศึกษาอัลกอริทึมในการแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดที่ความยาวของเส้นขอบแสดงด้วยตัวเลขฟัซซี่สามเหลี่ยมและแสดงตัวเลขแบบช่วง เขาได้ทำการเปรียบเทียบจากค่าเฉลี่ยของเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่จากจุดยอดทั้งหมดเพื่อหาระยะทางที่สั้นที่สุด โดยผลลัพธ์จากอัลกอริทึมที่นำเสนอนี้สามารถช่วยหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่สามเหลี่ยมและตัวเลขแบบช่วงได้ Hernandez F และคณะ [6] ได้แก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนเครือข่ายที่มีค่าพารามิเตอร์แบบฟัซซี่ โดยนำเสนออัลกอริทึมแบบวนซ้ำเพื่อเปรียบเทียบตัวเลขฟัซซี่ นอกจากนี้ได้ใช้อัลกอริทึม Ford–Moore–Bellman สำหรับกราฟทั่วไป และกราฟที่มีพารามิเตอร์เป็นลบ

และได้พัฒนาความสัมพันธ์แบบเรียงลำดับอัลกอริทึมเพื่อเป็นเครื่องมือช่วยให้ผู้มีอำนาจในการตัดสินใจสามารถเลือกเส้นทางที่สั้นที่สุดได้ Deng Y และคณะ [7] ได้นำเสนออัลกอริทึมเกี่ยวกับการแก้ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดแบบฟิชชี สองวิธีคือวิธีที่หนึ่งการเพิ่มเส้นขอบสองเส้นเข้าไปกราฟ และวิธีที่สองคือแสดงการรวมค่าเฉลี่ยของตัวเลขฟิชชี และทำการหาระยะทางที่สั้นที่สุดโดยใช้อัลกอริทึมของ Dijkstra ผลจากการศึกษาพบว่าทั้งสองวิธีสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดที่เป็นแบบฟิชชีได้ และ Lin L, Wu C และ Ma L [8] ได้ศึกษาวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้อัลกอริทึมทางพันธุกรรมสำหรับปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดของฟิชชีในฟิชชีเครือข่ายในขั้นแรกเขาได้คำนวณความยาวของเส้นทางแบบฟิชชีโดยใช้เทคนิคการรวมค่าเฉลี่ยของตัวเลขฟิชชีสามเหลี่ยมและในขั้นต่อมาได้ทำการเปรียบเทียบเส้นทางที่สั้นที่สุดโดยใช้อัลกอริทึมทางพันธุกรรมจากจุดต้นทางไปยังจุดปลายทาง วิธีการนี้สามารถใช้แก้ปัญหาข้อมูลที่เป็นตัวเลขฟิชชีสามเหลี่ยมได้

อัลกอริทึมของ Dijkstra เป็นวิธีการสำหรับแก้ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดและนิยมใช้มากอีกวิธีหนึ่ง วิธีการนี้ถูกสร้างขึ้นโดย Dijkstra EW [9] ในปี ค.ศ. 1956 และตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 1959 อัลกอริทึมนี้ใช้ในการคำนวณหาเส้นทางที่สั้นที่สุดระหว่าง 2 โหนด (หรือจุด) ใด ๆ ในกราฟ โดยที่ค่าน้ำหนักของทุกโหนดจะต้องมีค่าเป็นบวก อย่างไรก็ตามในการใช้อัลกอริทึมของ Dijkstra ตัวเลขที่ใช้ต้องมีความแน่นอน ซึ่งหากตัวเลขไม่ชัดเจนมีความคลุมเครือหรืออาจกล่าวได้ว่าข้อมูลเป็นแบบฟิชชี จำเป็นต้องปรับตัวเลขที่คลุมเครือ ให้มีความชัดเจนก่อนการนำไปใช้

ในบทความวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาวิธีแก้ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุด โดยกำหนดให้ข้อมูลค่าใช้จ่ายในการเดินทางแสดงด้วยตัวเลขฟิชชีสี่เหลี่ยมคางหมู เนื่องจากปัญหาที่พบจะอยู่ในรูปของตัวเลขฟิชชีสี่เหลี่ยมคางหมู และนอกจากนี้ยังสามารถใช้ได้ครอบคลุมไปถึงข้อมูลที่เป็นแบบฟิชชีสามเหลี่ยมซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของฟิชชีสี่เหลี่ยมคางหมูอีกด้วย ในการวิเคราะห์ข้อมูลจะกล่าวถึงในสองประเด็น คือ ประเด็นแรกจะเป็นการนำข้อมูลที่เป็นตัวเลขฟิชชีสี่เหลี่ยมคางหมูมาทำการวิเคราะห์เพื่อหาค่าที่เป็นตัวแทนของตัวเลขฟิชชี โดยจะใช้เทคนิคการจัดอันดับที่แข็งแกร่ง (Robust ranking technique) ประเด็นที่สองหลังจากได้ค่าที่เป็นตัวแทนของตัวเลขฟิชชีแล้วจะใช้อัลกอริทึมของ Dijkstra เพื่อคำนวณค่าใช้จ่ายในการเดินทางน้อยที่สุด (เส้นทางที่สั้นที่สุด) **วัตถุประสงค์ของการวิจัย**

เพื่อหาวิธีการแก้ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดแบบตัวเลขฟิชชีสี่เหลี่ยมคางหมู

2. วิธีดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัย ดังนี้

- 1) ศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาระยะทางสั้นที่สุดแบบฟิชชี
- 2) ศึกษาอัลกอริทึมของ Dijkstra เพื่อหาระยะทางสั้นที่สุด
- 3) แสดงการวิเคราะห์ข้อมูลที่เป็นตัวแทนของตัวเลขฟิชชีสี่เหลี่ยมคางหมู ใช้เทคนิคการจัดอันดับที่แข็งแกร่ง
- 4) การนำเสนอขั้นตอนและแสดงการหาผลลัพธ์สำหรับปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟิชชีโดยใช้อัลกอริทึมของ Dijkstra
- 5) สรุปผลการดำเนินงานและข้อเสนอแนะ

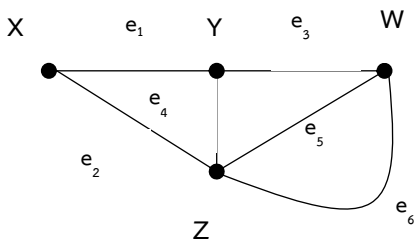
3.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีกราฟ

ทฤษฎีกราฟ เป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่สามารถนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ เช่น ปัญหาการวางสายโทรศัพท์ การเดินทาง การจราจร การวางผังเมือง เป็นต้น

ส่วนประกอบของกราฟ (G) ประกอบด้วย

เซตของจุดยอด (Vertex) หรือโหนดที่ไม่เป็นเซตว่างแทนด้วย $V(G)$ เซตของเส้นเชื่อม (Edge) ที่แต่ละเส้นเชื่อมมีจุดยอดหนึ่งจุดหรือสองจุดที่เกี่ยวข้องกัน แทนด้วย $E(G)$ เส้นทางหรือวิถี (path) คือลำดับของเส้นเชื่อมในกราฟที่จุดยอดทั้งหมดแตกต่างกัน [10] แสดงดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 ตัวอย่างกราฟ

$$G = (V, E)$$

$$V(G) = \{W, X, Y, Z\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

รูปแบบหนึ่งของวิถีหรือเส้นทาง X-W คือ X, e_1 , Y, e_3 , W

ฟัซซีเซต (Fuzzy set)

แนวคิดพื้นฐานของฟัซซีเซต ถูกคิดค้นขึ้นในปี ค.ศ. 1965 โดย Zadeh LA [11] เพื่อจัดการกับข้อมูลที่มีความไม่แน่นอน มีความคลุมเครือ

ฟัซซีเซตเป็นเซตที่มีขอบเขตแบบคลุมเครือ โดยที่ฟัซซีเซตมีการกำหนดค่าระดับความเป็นสมาชิกในเซต (Degree of membership) อยู่ระหว่าง 0 และ 1 ซึ่งแตกต่างจากเซตแบบฉบับ (Classical set) ที่มีการกำหนดค่าความเป็นสมาชิกเพียง 2 ค่า เท่านั้น คือ 0 หมายถึงไม่เป็นสมาชิกในเซต และ 1 หมายถึงเป็นสมาชิกในเซต และการกำหนดค่าระดับความเป็นสมาชิกนั้นต้องอาศัยฟังก์ชันความเป็นสมาชิกสำหรับฟัซซีเซต ฟังก์ชัน $\mu_{\tilde{A}}$ เรียกว่าฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (Membership function) ของฟัซซีเซต $\tilde{A}$ นิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 1 [11] ฟัซซีเซต $\tilde{A}$ ใน X คือคู่อันดับ $(X, \mu_{\tilde{A}})$ เมื่อ X เป็นเซตไม่ว่าง และ $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ เรียก $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ว่าระดับความเป็นสมาชิกของ x ในฟัซซีเซต $\tilde{A}$ ดังนั้นค่า $[0, 1]$ คือระดับความเป็นสมาชิกของ x ในฟัซซีเซต $\tilde{A}$

นิยาม 2 [12] กำหนดให้ฟัซซีเซต $\tilde{A}$ เป็นฟัซซีเซตบนจำนวนจริง R จะเรียก $\tilde{A}$ ว่าเป็นตัวเลขฟัซซี ถ้ามีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกเป็นดังนี้ คือ

$$1) \mu_{\tilde{A}} : R \rightarrow [0, 1] \text{ มีความต่อเนื่อง}$$

$$2) \mu_{\tilde{A}}(x) = 0,$$

$$\text{ทุก } x \in (-\infty, u_1] \cup [u_r, \infty)$$

$$3) \mu_{\tilde{A}}(x) \text{ เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอบนช่วง } [u_1, u_1] \text{ และลดลงอย่างสม่ำเสมอบนช่วง } [u_2, u_r]$$

$$4) \mu_{\tilde{A}}(x) = w,$$

$$\text{ทุก } x \in [u_1, u_2], 0 < w \leq 1$$

เมื่อ u_1, u_1, u_2, u_r เป็นจำนวนจริงบวก

ตัวเลขฟัซซีมีหลายชนิด ชนิดที่นักวิจัยใช้มากคือตัวเลขฟัซซีสี่เหลี่ยมคางหมู เนื่องจากสามารถใช้ได้ครอบคลุมไปถึงข้อมูลที่เป็นแบบฟัซซีสามเหลี่ยม ในนิยามต่อไปนี้จะกล่าวถึงตัวเลขฟัซซีสี่เหลี่ยมคางหมู α -เซตตัด และเทคนิคการจัดอันดับที่แข็งแกร่งเพื่อนำไปใช้ในการหาค่าที่เป็นตัวแทนของตัวเลขฟัซซี นิยามดังนี้

นิยาม 3 [2] ตัวเลขฟัซซี $\tilde{u} = (u_l, u_1, u_2, u_r)$ จะเรียกว่าเป็นตัวเลขฟัซซีสี่เหลี่ยมคางหมู ถ้ามีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกเป็นดังนี้

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < u_l \\ \frac{(x-u_l)}{(u_1-u_l)} & , \quad u_l \leq x \leq u_1 \\ 1 & , \quad u_1 \leq x \leq u_2 \\ \frac{(u_r-x)}{(u_r-u_2)} & , \quad u_2 \leq x \leq u_r \\ 0 & , \quad x > u_r \end{cases} \quad (1)$$

เมื่อ $u_l \leq u_1 \leq u_2 \leq u_r$

ข้อสังเกต จากนิยาม 3 ตัวเลขฟัซซีสี่เหลี่ยมคางหมู $\tilde{u} = (u_l, u_1, u_2, u_r)$ ถ้า $u_1 = u_2 = p$ แล้ว $\tilde{u} = (u_l, p, u_r)$ จะได้ว่า $\tilde{u} = (u_l, p, u_r)$ เป็นฟัซซีสามเหลี่ยมซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของตัวเลขฟัซซีสี่เหลี่ยมคางหมู

นิยาม 4 [13] α -เซตตัด ของตัวเลขฟัซซีสี่เหลี่ยมคางหมู $\tilde{u} = (u_l, u_1, u_2, u_r)$ นิยามโดย $\tilde{u}_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{u}}(x) \geq \alpha\}$ และ $\alpha \in [0, 1]$ เมื่อ X เป็นเซตของเอกภพสัมพัทธ์

จากนิยาม 4 จะได้ว่าเซตตัดของ $\tilde{u}$ คือ

$\tilde{u}_\alpha = [\tilde{u}_\alpha^L, \tilde{u}_\alpha^U]$ และจากสมการที่ (1) สามารถนำมาจัดรูป α -เซตตัด ของตัวเลขฟัซซีสี่เหลี่ยมคางหมู $\tilde{u} = (u_l, u_1, u_2, u_r)$ ได้ดังนี้

$$\frac{u_l \alpha - u_l}{u_1 - u_l} = \alpha \quad \text{และ} \quad \frac{u_r - u_2 \alpha}{u_r - u_2} = \alpha$$

จะได้ว่า $\tilde{u}_\alpha^L = u_l + (u_1 - u_l)\alpha$ และ

$\tilde{u}_\alpha^U = u_r - (u_r - u_2)\alpha$ ดังนั้น

$$\tilde{u}_\alpha = [u_l + (u_1 - u_l)\alpha, u_r - (u_r - u_2)\alpha]$$

3.2 เทคนิคการจัดอันดับที่แข็งแกร่ง (Robust's ranking technique)

ต่อไปจะนำเสนอเทคนิคการจัดอันดับที่แข็งแกร่ง คิดค้นโดย Yager RR [12]

นิยาม 5 [12] กำหนดให้ $\tilde{u}$ เป็นตัวเลขฟัซซีคอนเวกซ์ (Convex fuzzy number) ดัชนีการจัดอันดับที่แข็งแกร่ง (Robust's Ranking Index) นิยามโดย

$$R(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \int_0^1 [\tilde{u}_\alpha^L, \tilde{u}_\alpha^U] d\alpha \quad (2)$$

เมื่อ $[\tilde{u}_\alpha^L, \tilde{u}_\alpha^U]$ เป็น α -เซตตัดของตัวเลขฟัซซี $\tilde{u}$ จากนิยามที่ 3, 6 และสมการที่ (2) จะได้

$$\begin{aligned} R(\tilde{u}) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [\tilde{u}_\alpha^L, \tilde{u}_\alpha^U] d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [u_l + (u_1 - u_l)\alpha + u_r - (u_r - u_2)\alpha] d\alpha \quad (3) \end{aligned}$$

สัญลักษณ์ $R(\tilde{u})$ แทนดัชนีค่าของตัวเลขฟัซซี $\tilde{u}$ ในงานวิจัยนี้จะใช้สัญลักษณ์ $R(\tilde{u}_{ij})$ แทนดัชนีค่าเดินทางฟัซซีจากโหนดต้นทางที่ i ไปยังโหนดปลายทางที่ j

3.3 อัลกอริทึมของ Dijkstra สำหรับการแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่

วิธีการแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่ (Fuzzy shortest path problem) ในที่นี้เมื่อได้ค่าของข้อมูลที่เป็นตัวแทนของตัวเลขฟัซซี่แล้ว จะใช้อัลกอริทึมของ Dijkstra [9] ในการแก้ปัญหา ซึ่งจะดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : พิจารณากราฟ/เส้นทางที่กำหนดที่เป็นตัวเลขฟัซซี่ นำตัวเลขที่ได้จากวิธีการจัดการอันดับที่แข็งแกร่ง ที่เป็นตัวแทนของตัวเลขฟัซซี่ ใส่แทนลงในค่าน้ำหนักในแต่ละเส้นทางให้ครบทุกเส้นทาง

ขั้นตอนที่ 2 : ในครั้งแรกกำหนดโหนดต้นทาง (Source node) และกำหนดโหนดปลายทาง (Destination node) ที่ต้องการหาเส้นทางที่น้อยที่สุด/ระยะทางที่สั้นที่สุด

ขั้นตอนที่ 3 : กำหนดค่าระยะทางให้กับทุกโหนด ตั้งค่าเป็นศูนย์สำหรับโหนดต้นทาง และโหนดอื่นมีค่าเป็นอนันต์

ขั้นตอนที่ 4 : ทำเครื่องหมายโหนดทั้งหมดว่าไม่ได้สำรวจ ตั้งค่าโหนดเริ่มต้นเป็นปัจจุบัน

ขั้นตอนที่ 5 : ให้โหนดที่เลือกมาแล้วนี้มีสถานะสำรวจแล้ว พิจารณาโหนดที่อยู่ติดกับโหนดที่เลือกทุกโหนด จากนั้นเลือกโหนดที่มีน้ำหนักที่น้อยที่สุด/ระยะทางที่สั้นที่สุด ให้เป็นโหนดที่มีการสำรวจแล้ว และคำนวณค่าน้ำหนักรวมของเส้นทางที่มีสถานะสำรวจแล้ว ซึ่งโหนดที่ถูกเลือกจะมีค่าระยะทางรวมน้อยกว่าโหนดที่ไม่ถูกเลือกอื่น ๆ

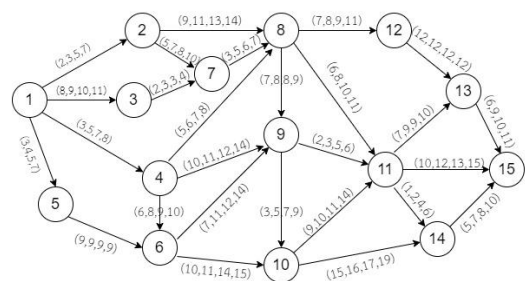
ขั้นตอนที่ 6 : ทำการสำรวจโหนดอื่นเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนได้โหนดที่ต้องการครบทุกโหนดทำเครื่องหมายว่ามีสถานะสำรวจแล้ว โหนดที่สำรวจแล้วจะไม่ถูกตรวจสอบอีก

ขั้นตอนที่ 7 : คำนวณค่าน้ำหนักจากตัวเลขที่ได้รวมทุกเส้นทาง

4. ผลการวิจัยและอภิปรายผล

หัวข้อนี้จะนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาค่าใช้จ่ายในการเดินทางที่น้อยที่สุด ภายใต้ความไม่แน่นอนของค่าใช้จ่ายในการเดินทาง ซึ่งจะเป็นการประมาณค่าใช้จ่าย ในสถานการณ์จริงทั่วไปข้อมูลที่น่ามาคำนวณจะได้มาจากการเก็บข้อมูลค่าใช้จ่ายในการเดินทางซึ่งเป็นการนำข้อมูลย้อนหลังมาพิจารณาว่าตัวเลขที่เกิดขึ้นอยู่ในช่วงใด แล้วจึงนำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์ ในตัวอย่างนี้กำหนดปัญหาให้อยู่ภายใต้สมมติฐานที่ว่า ค่าใช้จ่ายในการเดินทางเป็นแบบฟัซซี่สี่เหลี่ยมคางหมู ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้การเดินทางจากจุดเริ่มต้นที่ 1 ไปยังจุดหมายปลายทาง 15 จะต้องมียค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด กำหนดให้ตัวเลขที่อยู่บนเส้นขอบ (หรือเส้นเชื่อม) จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งที่แตกต่างกันนั้นเป็นตัวเลขค่าใช้จ่ายในการเดินทางแบบฟัซซี่สี่เหลี่ยมคางหมู ดังตารางที่ 1 และภาพแสดงค่าเดินทางไปยังจุดต่าง ๆ แสดงดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 การแสดงค่าเดินทางที่มีความยาวเส้นขอบแบบฟัซซี่

ตารางที่ 1 แสดงข้อมูลค่าเดินทางแบบฟิชชีส์เหลี่ยมคางหมู (หน่วยเป็นบาท)

เส้นขอบ	ค่าเดินทาง	เส้นขอบ	ค่าเดินทาง	เส้นขอบ	ค่าเดินทาง
(1,2)	(2,3,5,7)	(4,9)	(10,11,12,14)	(9,11)	(2,3,5,6)
(1,3)	(8,9,10,11)	(5,6)	(9,9,9,9)	(10,11)	(9,10,11,14)
(1,4)	(3,5,7,8)	(6,9)	(7,11,12,14)	(10,14)	(15,16,17,19)
(1,5)	(3,4,5,7)	(6,10)	(10,11,14,15)	(11,13)	(7,9,9,10)
(2,7)	(5,7,8,10)	(7,8)	(3,5,6,7)	(11,14)	(1,2,4,6)
(2,8)	(9,11,13,14)	(8,9)	(7,8,8,9)	(11,15)	(10,12,13,15)
(3,7)	(2,3,3,4)	(8,11)	(6,8,10,11)	(12,13)	(12,12,12,12)
(4,6)	(6,8,9,10)	(8,12)	(7,8,9,11)	(13,15)	(6,9,10,11)
(4,8)	(5,6,7,8)	(9,10)	(3,5,7,9)	(14,15)	(5,7,8,10)

จากตารางที่ 1 จะเห็นว่าค่าเดินทางแสดงเป็นตัวเลขฟิชชีส์เหลี่ยมคางหมู ดังนั้นหากต้องการหาค่าใช้จ่ายในการเดินทางที่น้อยที่สุด จำเป็นต้องหาค่าที่เป็นตัวแทนของตัวเลขฟิชชีส์เหลี่ยมคางหมูก่อน ในที่นี้ใช้เทคนิคการจัดอันดับที่แข็งแกร่งเพื่อหาค่าใช้จ่ายในการเดินทางใหม่ ดังนี้ พิจารณาเส้นขอบ(1,2) จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 2 ค่าเดินทางคือ (2,3,5,7) จัดรูปตัวเลขค่าเดินทางใหม่โดยใช้นิยามที่ 3 และ 4 ดังนี้

เส้นขอบ (1,2) ค่าเดินทางคือ (2,3,5,7) โดยใช้นิยามที่ 3 และ 4 จะได้ว่า

$$\frac{2\alpha - 2}{3 - 2} = \alpha \quad \text{และ} \quad \frac{7 - 5\alpha}{7 - 5} = \alpha$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}^L &= 2 + (3 - 2)\alpha \\ &= 2 + \alpha\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}^U &= 7 - (7 - 5)\alpha \\ &= 7 - 2\alpha\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \tilde{\alpha} = [2 + \alpha, 7 - 2\alpha]$$

$$\text{โดยนิยามที่ 5 แทนค่า} \quad \tilde{\alpha} = [2 + \alpha, 7 - 2\alpha]$$

ในสมการ (3) ดังนี้

$$\begin{aligned}R(\tilde{\alpha}_{(1,2)}) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [(2 + \alpha) + (7 - 2\alpha)] d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (9 - \alpha) d\alpha \\ &= 4.25\end{aligned}$$

ดังนั้นค่าเดินทางใหม่จากโหนด 1 ไปยังโหนด 2 โดยใช้เทคนิคการจัดอันดับที่แข็งแกร่ง ได้เท่ากับ 4.25 ในทำนองเดียวกันในเส้นทางอื่น ๆ จะได้ค่าเดินทางใหม่ดังนี้ คือ

$R(\tilde{u}_{1,2}) = 4.25, R(\tilde{u}_{1,3}) = 9.5, R(\tilde{u}_{1,4}) = 5.75,$
 $R(\tilde{u}_{1,5}) = 4.75, R(\tilde{u}_{2,7}) = 7.5, R(\tilde{u}_{2,8}) = 10.75,$
 $R(\tilde{u}_{3,7}) = 3, R(\tilde{u}_{4,6}) = 8.25, R(\tilde{u}_{4,8}) = 6.5,$
 $R(\tilde{u}_{4,9}) = 11.75, R(\tilde{u}_{5,6}) = 9, R(\tilde{u}_{6,9}) = 11,$
 $R(\tilde{u}_{6,10}) = 12.5, R(\tilde{u}_{7,8}) = 5.25, R(\tilde{u}_{8,9}) = 8,$
 $R(\tilde{u}_{8,11}) = 8.75, R(\tilde{u}_{8,12}) = 8.75, R(\tilde{u}_{9,10}) = 6,$
 $R(\tilde{u}_{9,11}) = 4, R(\tilde{u}_{10,11}) = 11, R(\tilde{u}_{10,14}) = 16.75,$

$R(\tilde{u}_{11,13}) = 8.75, R(\tilde{u}_{11,14}) = 3.25, R(\tilde{u}_{11,15}) = 12.5$
 $R(\tilde{u}_{12,13}) = 12, R(\tilde{u}_{13,15}) = 9, R(\tilde{u}_{14,15}) = 7.5$

ค่าเดินทางใหม่แสดงดังตารางที่ 2 และ
 ภาพแสดงค่าเดินทางใหม่ที่ถูกรับค่าแล้วแสดงดัง
 ภาพที่ 3

ตารางที่ 2 ข้อมูลค่าเดินทางที่ถูกปรับค่าโดยใช้เทคนิคการจัดอันดับที่แข็งแกร่ง

เส้นขอบ	ค่าเดินทาง	เส้นขอบ	ค่าเดินทาง	เส้นขอบ	ค่าเดินทาง
(1,2)	4.25	(4,9)	11.75	(9,11)	4
(1,3)	9.5	(5,6)	9	(10,11)	11
(1,4)	5.75	(6,9)	11	(10,14)	16.75
(1,5)	4.75	(6,10)	12.5	(11,13)	8.75
(2,7)	7.5	(7,8)	5.25	(11,14)	3.25
(2,8)	10.75	(8,9)	8	(11,15)	12.5
(3,7)	3	(8,11)	8.75	(12,13)	12
(4,6)	8.25	(8,12)	8.75	(13,15)	9
(4,8)	6.5	(9,10)	6	(14,15)	7.5

ต่อไปจะแสดงการหาระยะทางที่สั้นที่สุดโดยใช้
 อัลกอริทึมของ Dijkstra สำหรับการแก้ปัญหา
 เส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟิชชี ดำเนินการตามขั้นตอน
 ดังนี้

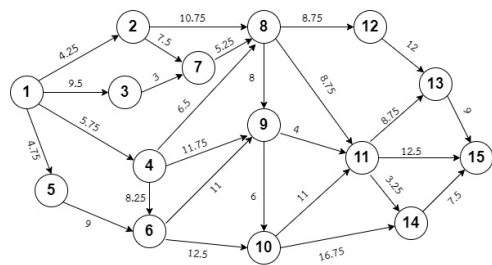
ขั้นตอนที่ 1 : พิจารณากราฟ/เส้นทางที่
 กำหนดที่เป็นฟิชชีดังตารางที่ 1 จากนั้นใช้วิธีเทคนิค
 การจัดอันดับที่แข็งแกร่ง เพื่อหาค่าที่เป็นตัวแทนของ
 ตัวเลขฟิชชี แสดงได้ดังตารางที่ 2 และแทนค่า
 น้ำหนักในแต่ละเส้นทาง ให้ครบทุกเส้นทางดัง
 ภาพที่ 2

ขั้นตอนที่ 2 : กำหนดโหนด 1 เป็นโหนดต้น
 ทาง และกำหนดโหนด 15 เป็นโหนดปลายทาง

ขั้นตอนที่ 3 : ให้โหนด 1 มีค่าเริ่มต้นเป็น
 ศูนย์ และโหนด 2 ถึง 15 มีค่าเป็นอนันต์

ขั้นตอนที่ 4 : พิจารณาโหนดที่อยู่ติดกับโหนด
 1 ซึ่งมีโหนด 2, 3, 4 และ 5 เลือกโหนดที่มีค่าเดินทาง
 น้อยที่สุด นั่นคือโหนด 2 ให้เป็นโหนดที่มีการสำรวจ
 แล้ว และคำนวณค่าน้ำหนักรวมของเส้นทางที่มี
 สถานะสำรวจแล้ว ซึ่งโหนดที่ถูกเลือกจะมีค่า
 ระยะทางรวมน้อยกว่าโหนดที่ไม่ถูกเลือกอื่น ๆ

ขั้นตอนที่ 5 : ทำการสำรวจโหนดอื่นเช่นนี้
ต่อไปเรื่อย ๆ จนได้โหนดที่ต้องการครบทุกโหนด
ขั้นตอนที่ 6 : คำนวณค่าน้ำหนักจากตัวเลขที่
ได้รวมทุกเส้นทาง



ภาพที่ 3 การแสดงค่าเดินทางที่ถูกปรับค่าโดยใช้
เทคนิคการจัดอันดับที่แข็งแกร่ง

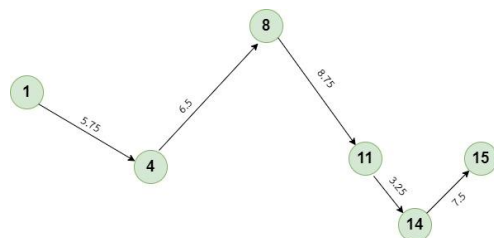
ตารางที่ 3 ลำดับการหาระยะทางที่สั้นที่สุดโดยอัลกอริทึมของ Dijkstra

ลำดับ ขั้นตอน (step)	เส้นทางที่สำรวจแล้ว (Explored)	เส้นทางที่ยังไม่ได้สำรวจ (Unexplored)
1		$1^0, 2^\infty, 3^\infty, 4^\infty, 5^\infty, 6^\infty, 7^\infty, 8^\infty, 9^\infty, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty, 15^\infty$
2	1^0	$2^{4.25(1)}, 3^{9.5(1)}, 4^{5.75(1)}, 5^{4.75(1)}, 6^\infty, 7^\infty, 8^\infty, 9^\infty, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty, 15^\infty$
3	$1^0, 2^{4.25(1)}$	$3^{9.5(1)}, 4^{5.75(1)}, 5^{4.75(1)}, 6^\infty, 7^{11.75(2)}, 8^{15(2)}, 9^\infty, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty, 15^\infty$
4	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}$	$3^{9.5(1)}, 4^{5.75(1)}, 6^{13.75(5)}, 7^{11.75(2)}, 8^{15(2)}, 9^\infty, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty, 15^\infty$
5	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}, 4^{5.75(1)}$	$3^{9.5(1)}, 6^{13.75(5)}, 7^{11.75(2)}, 8^{12.25(4)}, 9^{17.5(4)}, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty, 15^\infty$
6	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}, 4^{5.75(1)}, 3^{9.5(1)}$	$6^{13.75(5)}, 7^{11.75(2)}, 8^{12.25(4)}, 9^{17.5(4)}, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty, 15^\infty$
7	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}, 4^{5.75(1)}, 3^{9.5(1)}, 7^{11.75(2)}$	$6^{13.75(5)}, 8^{12.25(4)}, 9^{17.5(4)}, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty, 15^\infty$
8	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}, 4^{5.75(1)}, 3^{9.5(1)}, 7^{11.75(2)}, 8^{12.25(4)}$	$6^{13.75(5)}, 9^{17.5(4)}, 10^\infty, 11^{21(8)}, 12^{21(8)}, 13^\infty, 14^\infty, 15^\infty$

ตารางที่ 3 (ต่อ) ลำดับการหาระยะทางที่สั้นที่สุดโดยอัลกอริทึมของ Dijkstra

ลำดับ ขั้นตอน (step)	เส้นทางที่สำรวจแล้ว (Explored)	เส้นทางที่ยังไม่ได้สำรวจ (Unexplored)
9	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}, 4^{5.75(1)}, 3^{9.5(1)}, 7^{11.75(2)}, 8^{12.25(4)}, 6^{13.75(5)}$	$9^{17.5(4)}, 10^{26.25(6)}, 11^{21(8)}, 12^{21(8)}, 13^\infty, 14^\infty, 15^\infty$
10	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}, 4^{5.75(1)}, 3^{9.5(1)}, 7^{11.75(2)}, 8^{12.25(4)}, 6^{13.75(5)}, 9^{17.5(4)}$	$10^{23.5(9)}, 11^{21(8)}, 12^{21(8)}, 13^\infty, 14^\infty, 15^\infty$
11	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}, 4^{5.75(1)}, 3^{9.5(1)}, 7^{11.75(2)}, 8^{12.25(4)}, 6^{13.75(5)}, 9^{17.5(4)}, 11^{21(8)}$	$10^{23.5(9)}, 12^{21(8)}, 13^{29.75(11)}, 14^{24.25(11)}, 15^{33.5(11)}$
12	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}, 4^{5.75(1)}, 3^{9.5(1)}, 7^{11.75(2)}, 8^{12.25(4)}, 6^{13.75(5)}, 9^{17.5(4)}, 11^{21(8)}, 12^{21(8)}$	$10^{23.5(9)}, 13^{29.75(11)}, 14^{24.25(11)}, 15^{33.5(11)}$
13	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}, 4^{5.75(1)}, 3^{9.5(1)}, 7^{11.75(2)}, 8^{12.25(4)}, 6^{13.75(5)}, 9^{17.5(4)}, 11^{21(8)}, 12^{21(8)}, 10^{23.5(9)}$	$13^{29.75(11)}, 14^{24.25(11)}, 15^{33.5(11)}$
14	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}, 4^{5.75(1)}, 3^{9.5(1)}, 7^{11.75(2)}, 8^{12.25(4)}, 6^{13.75(5)}, 9^{17.5(4)}, 11^{21(8)}, 12^{21(8)}, 10^{23.5(9)}, 14^{24.25(11)}$	$13^{29.75(11)}, 15^{31.75(14)}$
15	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}, 4^{5.75(1)}, 3^{9.5(1)}, 7^{11.75(2)}, 8^{12.25(4)}, 6^{13.75(5)}, 9^{17.5(4)}, 11^{21(8)}, 12^{21(8)}, 10^{23.5(9)}, 14^{24.25(11)}, 13^{29.75(11)}$	$15^{31.75(14)}$
16	$1^0, 2^{4.25(1)}, 5^{4.75(1)}, 4^{5.75(1)}, 3^{9.5(1)}, 7^{11.75(2)}, 8^{12.25(4)}, 6^{13.75(5)}, 9^{17.5(4)}, 11^{21(8)}, 12^{21(8)}, 10^{23.5(9)}, 14^{24.25(11)}, 13^{29.75(11)}, 15^{31.75(14)}$	

จากตารางที่ 3 แสดงลำดับขั้นตอนในการหา
ระยะทางที่สั้นที่สุดแบบพีชคณิตได้คำตอบที่น้อยที่สุด
โดยเริ่มต้นจากโหนดที่ 1 จนถึงโหนดที่ 15 เส้นทาง
ที่ได้จะเริ่มต้นเดินทางจากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 4
ต่อไปยังโหนดที่ 8 ไปยังโหนดที่ 11 ไปยังโหนดที่ 14
และสุดท้ายไปยังโหนดที่ 15 แสดงเส้นทางดังภาพที่ 4



ภาพที่ 4 การแสดงระยะทางที่สั้นที่สุด

จากตารางที่ 3 ระยะทางจากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดอื่น ๆ แสดงได้ดังนี้

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 2 : $1 \rightarrow 2 = 4.25$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 3 : $1 \rightarrow 3 = 9.51$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 4 : $1 \rightarrow 4 = 5.75$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 5 : $1 \rightarrow 5 = 4.75$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 6 : $1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 = 13.75$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 7 : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 = 11.75$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 8 : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 8 = 12.25$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 9 : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 9 = 17.5$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 10 : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 10 = 23.5$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 11 : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 11 = 21$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 12 : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 12 = 21$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 13 : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 11 \rightarrow 13 = 29.75$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 14 : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 11 \rightarrow 14 = 24.25$

จากโหนดที่ 1 ไปยังโหนดที่ 15 : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow 15 = 31.75$

จากผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบค่าใช้จ่ายทางในทุกเส้นทาง พบว่าเส้นทางที่ทำให้ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดคือเริ่มต้นเดินทางจากโหนดที่ 1 ไปยังโหนด

ที่ 4, 8, 11, 14 และ 15 ตามลำดับ ซึ่งค่าใช้จ่ายในการเดินทางที่มีค่าน้อยที่สุดคือ 31.75 บาท

5. สรุปผลการวิจัย

ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่ เป็นปัญหาการเพิ่มประสิทธิภาพเครือข่ายแบบผสมผสานที่ได้รับการนิยามอย่างมากในด้านทฤษฎีกราฟแบบฟัซซี่จากการศึกษาวิจัยของนักวิจัยหลายคน ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ซึ่งได้ใช้วิธีการหรือเครื่องมือในการหาระยะทางที่สั้นที่สุดด้วยวิธีการต่าง ๆ ที่แตกต่างกัน ภายใต้ข้อจำกัดที่ข้อมูลมีความไม่แน่นอนหรือมีความคลุมเครือ ดังนั้นในบทความวิจัยนี้ได้แสดงถึงวิธีการแก้ปัญหาดังกล่าว โดยกำหนดให้ค่าใช้จ่ายในการเดินทางแสดงด้วยตัวเลขฟัซซี่สี่เหลี่ยมคางหมู จากนั้นวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้เทคนิคการจัดอันดับที่แข็งแกร่งในการหาค่าที่เป็นตัวแทนของตัวเลขฟัซซี่ และแก้ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุด เพื่อหาค่าเดินทางที่น้อยที่สุดโดยใช้อัลกอริทึมของ Dijkstra แนวทางในการแก้ปัญหาที่กล่าวมาในบทความนี้ จะทำให้ผู้ตัดสินใจมีเครื่องมือที่ช่วยในการตรวจสอบและแก้ปัญหาภายใต้สถานการณ์ที่ข้อมูลมีความคลุมเครือได้อีกทางหนึ่ง นอกจากนี้ยังสามารถนำวิธีการนี้ไปประยุกต์ใช้ได้กับสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงในลักษณะเดียวกันนี้ได้ เช่น ปัญหาการคมนาคม การขนส่ง การเดินทางท่องเที่ยว เป็นต้น

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Bellman RE, Zadeh LA. Decision making in a fuzzy environment. Manage Sci. 1970; 17(4):141-64.

- [2] Dubois D, Prade H. Theory and Applications: Fuzzy Sets and Systems, New York:Academic Press;1980.
- [3] Takahashi MT, Yamakami A. On fuzzy shortest path problems with fuzzy parameters: an algorithmic approach. Fuzzy Logic Control for an Autonomous Robot. 2005 Annual meeting of the North American fuzzy information processing society; 26-28 June 2005; Detroit, MI, USA. IEEE; 2005.
- [4] Okada S. Fuzzy shortest path problems incorporating interactivity among paths. Fuzzy Sets Syst. 2004; 142(3):335–57.
- [5] Nayeem SMA, Pal M. Shortest path problem on a network with imprecise edge weight. Fuzzy Optim Decis Mak. 2005;4(4):293–312
- [6] Hernandez F, Lamata MT, Verdegay JL, Yamakami A. The shortest path problem on networks with fuzzy parameters. Fuzzy Sets Syst. 2007; 158(14):1561–70
- [7] Deng Y, Chen Y, Zhang Y, Mahadevan S. Fuzzy Dijkstra algorithm for shortest path problem under uncertain environment. Appl Soft Comput. 2012; 12(3):1231–7.
- [8] Lin L, Wu C, Ma L. A genetic algorithm for the fuzzy shortest path problem in a fuzzy network. Complex Intell Systems. 2021; 7:225–34
- [9] Dijkstra EW. A note on two problems in connexion with graphs. Numer Math (Heidelb). 1959;1:269–71.
- [10] Rosen KH. Graphs. Discrete mathematics and its applications. 7th ed. New York: McGraw-Hill; 2012. p. 641-79.
- [11] Zadeh LA. Fuzzy sets . Inf Control. 1965; 8(3):338-56.
- [12] Yager RR. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. Information Science. 1981; 24:143–61.
- [13] Mateos A, Jiménez A. A trapezoidal fuzzy numbers-based approach for aggregating group preferences and ranking decision alternatives in MCDM. Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Berlin: Heidelberg; 2009. p. 365–79.