

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 3n)^y = z^2$ เมื่อ $p, p + 3n$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

On the solutions of the Diophantine equation $p^x + (p + 3n)^y = z^2$ where $p, p + 3n$ are Primes and n is a non-negative integer

ศิริจันทร์ เวสารัชชาต^{1*} และ กตัญญู บุญชุมใจ²

Sirichan Vesarachasart^{1*} and Katunyu Boonchumjai²

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

¹Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University

²โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย รังสิต, คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

²Suankularb Wittayalai Rangsit School, Faculty of Science and Technology, Thammasat University

Corresponding Author: Email: sirichan@mathstat.sci.tu.ac.th

Received: 23-09-2024 Revised: 5-12-2024 Accepted: 27-12-2024

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้เราศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 3n)^y = z^2$ เมื่อ x, y, z, n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ, $p, p + 3n$ เป็นจำนวนเฉพาะ เราพบว่าเมื่อ $p \equiv 1 \pmod{3}$ สมการนี้ไม่มีผลเฉลย ถ้า $p \equiv 0 \pmod{3}$ แล้วสมการนี้มีผลเฉลยเมื่อ $p = 3$ เท่านั้น สำหรับกรณี $p \equiv 2 \pmod{3}$ และ $x + y \leq 3$ สมการนี้มีผลเฉลยเป็น $(x, y, z, p, n) = (0, 3, 3, 2, 0), (3, 0, 3, 2, n), (1, 1, \sqrt{2p + 3n}, p, n), (2, 1, \sqrt{p^2 + p + 3n}, p, n)$ สำหรับบางจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ n และ เป็นจำนวนเต็มบวก นอกจากนี้เราได้หาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 3^y = z^2$ ซึ่งก็คือ $(x, y, z) = (2k, 2k + 1, 2 \cdot 3^k)$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์, ผลเฉลย, จำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ, จำนวนเฉพาะ

Abstract

This paper, we studied the Diophantine equation $p^x + (p + 3n)^y = z^2$ where x, y, z, n are non-negative integers, $p, p + 3n$ are prime numbers. We found that this equation has no solutions when $p \equiv 1 \pmod{3}$, if $p \equiv 0 \pmod{3}$, this equation has a solution only if $p = 3$. In case $p \equiv 2 \pmod{3}$ and $x + y \leq 3$, the solutions of this equation are $(x, y, z, p, n) = (0, 3, 3, 2, 0), (3, 0, 3, 2, n), (1, 1, \sqrt{2p + 3n}, p, n), (2, 1, \sqrt{p^2 + p + 3n}, p, n)$ for some non-negative integers n and $\sqrt{2p + 3n}, \sqrt{p^2 + p + 3n}$ are positive integers. Additionally, we find the non-negative integer solutions of the Diophantine equation $3^x + 3^y = z^2$, that is $(x, y, z) = (2k, 2k + 1, 2 \cdot 3^k)$ where k is a non-negative integer.

Keyword: Diophantine equation, Solution, Non-negative integer, Prime number

1. บทนำ

หลายทศวรรษที่ผ่านมาผู้ให้ความสนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์เป็นจำนวนมาก โดยผู้วิจัยสนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบต่าง ๆ ว่ามีผลเฉลยหรือไม่ และมีผลเฉลยเป็นอย่างไร ในปี ค.ศ. 2007 Acu D. [1] ได้หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 5^y = z^2$ พบว่าสมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียง 2 ผลเฉลย คือ $(x,y,z) = (3,0,3)$ และ $(2,1,3)$ ต่อมาใน ค.ศ. 2013 Chotchaistit S. [2] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 11^y = z^2$ ผลจากการศึกษาพบว่าผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการนี้ คือ $(x,y,z) = (3,0,3)$ ปีถัดมา Sroysang B. [3] ได้สนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 31^y = z^2$ เมื่อ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ พบว่าสมการนี้ไม่มีผลเฉลย หลังจากนั้นใน ค.ศ. 2019 Sugandha, A., Tripena A., และ Prabowo A. [4] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $13^x + 31^y = z^2$ คณะผู้วิจัยพบว่าสมการนี้ไม่มีผลเฉลย x,y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมาในปี ค.ศ. 2021 Paisal K. และ Chayaph P. [5] ได้สนใจสมการไดโอแฟนไทน์ 2 สมการ ได้แก่ $17^x + 83^y = z^2$ และ $29^x + 71^y = z^2$ ผลจากการศึกษาพบว่าทั้งสองสมการนี้มีผลเฉลย x,y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(1,1,10)$ และปี ค.ศ. 2023 Vesarachasart S., Eiemrawd C., Thiengham S. และคณะ [6] ได้ศึกษาและทำการพิสูจน์ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+12)^y = z^2$ เมื่อ $p, p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะ ไม่มีผลเฉลย x,y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ยกเว้นกรณี $p = 11$ สมการนี้มีผลเฉลย (x,y,z) คือ $(2,1,12)$

จากการสังเกตจะเห็นได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ข้างต้นอยู่ในรูปแบบ $p^x + q^y = z^2$ โดยที่ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่ $q = p + 3k$ เมื่อ

k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังความสัมพันธ์ในสมการต่อไปนี้

สำหรับสมการ $2^x + 5^y = z^2$ พบว่า $5 = 2 + 3(1)$, สมการ $2^x + 11^y = z^2$ พบว่า $11 = 2 + 3(3)$, สมการ $7^x + 31^y = z^2$ พบว่า $31 = 7 + 3(8)$, สมการ $13^x + 31^y = z^2$ พบว่า $31 = 13 + 3(6)$, สมการ $17^x + 83^y = z^2$ พบว่า $83 = 17 + 3(22)$, สมการ $29^x + 71^y = z^2$ พบว่า $71 = 29 + 3(14)$, ส่วนสมการ $p^x + (p+12)^y = z^2$ สามารถเขียนได้เป็น $p^x + (p+3(4))^y = z^2$ นั่นเอง

ในบทความวิจัยนี้จึงสนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+3n)^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและ $p, p+3n$ เป็นจำนวนเฉพาะ ผลจากการศึกษาพบว่าผลเฉลยของสมการนี้ยังคงครอบคลุมผลการศึกษาที่ได้เคยมีผู้ศึกษาก่อนหน้านี้ [1-5] สำหรับในการพิจารณาหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+3n)^y = z^2$ นี้เราอาศัยสมบัติพื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน และยังอาศัยข้อคาดการณ์คาตาลันซึ่งกล่าวไว้ในบทตั้ง 1.1 ดังนี้

บทตั้ง 1.1 ข้อคาดการณ์คาตาลัน (Catalan's Conjecture) [7] กล่าวว่า $(x,y,p,q) = (3,2,2,3)$ เป็นเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้นของสมการ $x^p - y^q = 1$ เมื่อ x,y,p,q เป็นจำนวนเต็มที่ $\max\{x,y,p,q\} > 1$

สำหรับข้อคาดการณ์คาตาลันนี้ได้ถูกพิสูจน์แล้วโดย P. Mihalescu [1] ในปี ค.ศ. 2004 และอาศัยผลจากบทตั้ง 1.1 นี้มาช่วยในการพิสูจน์เพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

$$p^x + (p+3n)^y = z^2 \text{ เมื่อ } p \equiv 2 \pmod{3}$$

นอกจากบทตั้ง 1.1 แล้วยังอาศัยสมบัติซึ่งได้พิสูจน์ไว้ในบทตั้ง 1.2 เพื่อช่วยในการพิสูจน์การหาผลเฉลย

ของสมการไดโอแฟนไทน์ในกรณี $p \equiv 0 \pmod{3}$

อีกด้วย สำหรับบทตั้ง 2.1 ได้พิสูจน์ไว้ดังนี้

บทตั้ง 1.2 ถ้า m เป็นจำนวนเต็ม แล้วได้ว่า

$$(1) \quad 3^m \equiv 1 \pmod{4} \text{ เมื่อ } m \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}$$

$$(2) \quad 3^m \equiv 3 \pmod{4} \text{ เมื่อ } m \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่}$$

พิสูจน์ สมมติให้ m เป็นจำนวนเต็ม

กรณี (1) ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้วมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $m = 2k$ เนื่องจาก $9 \equiv 1 \pmod{4}$ จึงได้ว่า $3^m = 3^{2k} = 9^k \equiv 1 \pmod{4}$

กรณี (2) ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้วมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $m = 2k + 1$ เนื่องจาก $9 \equiv 1 \pmod{4}$

จึงได้ว่า $3^m = 3^{2k+1} = (9^k)(3) \equiv 3 \pmod{4}$

2. ผลการวิจัย

พิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์

$$p^x + (p + 3n)^y = z^2 \quad (1)$$

เมื่อ x, y, z, n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $p, p + 3n$ เป็นจำนวนเฉพาะ พิจารณาสมการ (1) โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี ได้แก่

กรณี 1 $p \equiv 1 \pmod{3}$,

กรณี 2 $p \equiv 0 \pmod{3}$

และ กรณี 3 $p \equiv 2 \pmod{3}$

โดยเริ่มต้นพิจารณาจากกรณี 1 ถ้า $p \equiv 1 \pmod{3}$

ก่อน ซึ่งผลจากการศึกษาพบว่า กรณีนี้สมการไดโอแฟนไทน์ (1) ไม่มีผลเฉลย ส่วนกรณี 2 ถ้า $p \equiv 0 \pmod{3}$ แล้วได้ว่า $p = 3$ และ $n = 0$

พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ (1) จะอยู่ในรูป $3^x + 3^y = z^2$ ผลจากการศึกษาได้ว่า สมการนี้มีหลายผลเฉลยซึ่งได้พิสูจน์ไว้แล้วในทฤษฎีบท 2.1 และทฤษฎีบท 2.2

ทฤษฎีบท 2.1 สมการไดโอแฟนไทน์ (1) ไม่มีผลเฉลย เมื่อ $p \equiv 1 \pmod{3}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $p \equiv 1 \pmod{3}$ จึงได้ว่า

$$p + 3n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ทำให้}$$

$$p^x + (p + 3n)^y \equiv 2 \pmod{3}$$

แต่ $z^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ทฤษฎีบท 2.2 สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 3^y = z^2$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ

$$(x, y, z) = (2k, 2k + 1, 2 \cdot 3^k)$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ พิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์

$$3^x + 3^y = z^2 \quad (2)$$

ถ้า $x = y$ แล้วจากสมการ (2) จะได้ $2 \cdot 3^x = z^2$

ทำให้ z เป็นจำนวนเต็มคู่ จึงได้ว่า มีจำนวนเต็ม m ที่ไม่เป็นลบที่ $z = 2m$ และได้ว่า $2 \cdot 3^x = 4m^2$ นั่นคือ $3^x = 2m^2$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $x \neq y$ ซึ่งสามารถแบ่งการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี ดังนี้
กรณี 1 ถ้า x และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้วโดยบทตั้ง 1.2 (1) ได้ว่า

$$3^x \equiv 1 \pmod{4} \text{ และ } 3^y \equiv 1 \pmod{4}$$

จึงทำให้ $3^x + 3^y \equiv 2 \pmod{4}$ แต่เนื่องจาก

$$z^2 \equiv 0, 1 \pmod{4} \text{ จึงเกิดข้อขัดแย้ง กรณีนี้สมการ}$$

(2) จึงไม่มีผลเฉลย

กรณี 2 ถ้า x และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้วจากบทตั้ง 1.2 (2) ได้ว่า

$$3^x \equiv 3 \pmod{4} \text{ และ } 3^y \equiv 3 \pmod{4}$$

ทำให้ $3^x + 3^y \equiv 6 \equiv 2 \pmod{4}$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้นกรณีนี้ทำให้สมการ (2) ไม่มีผลเฉลย

กรณี 3 สมมติ x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ ได้ว่า $x = 2a$ และ $y = 2b + 1$

สำหรับบางจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ a และ b ดังนั้น

$$3^{2b+1} = z^2 - 3^{2a} = (z - 3^a)(z + 3^a)$$

จึงได้ว่า มีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ r, s ที่ $0 \leq r < s$ ซึ่งทำให้ $z - 3^a = 3^r$ และ $z + 3^a = 3^s$ โดยที่ $r + s = 2b + 1$ และเราได้ว่า

$$2 \cdot 3^a = 3^s - 3^r = 3^r (3^{s-r} - 1) \quad (3)$$

ถ้า $a = 0$ แล้วจาก (3) ได้ $r = 0$ และ $3^{s-r} = 3$ ทำให้ $s = 1$ และ $b = 0$ จึงได้ว่า $x = 0, y = 1$ และ $z = 2$ ดังนั้นสำหรับกรณี $a = 0$ พบว่าผลเฉลยของสมการ (2) คือ $(x, y, z) = (0, 1, 2)$

ถ้า $a > 0$ แล้วจาก (3) ได้ $r = a$ และ $s = a + 1$ เนื่องจาก $r + s = 2b + 1$ จึงได้ $a = b$ จึงทำให้ได้ว่า $x = 2a, y = 2a + 1$ และ $z = 2 \cdot 3^a$ ดังนั้นสำหรับกรณีนี้สรุปได้ว่าสมการ (2) มีผลเฉลยเป็น $(x, y, z) = (2a, 2a + 1, 2 \cdot 3^a)$

ส่วนกรณี x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ นั่น เราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับกรณี 3 ข้างต้น

ต่อไปจะพิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์ (1) สำหรับกรณีสุดท้าย คือ $p \equiv 2 \pmod{3}$ ในที่นี้จะพิจารณา x, y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่ง $x + y \leq 3$ ผลจากการศึกษาพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ (1) มีหลายผลเฉลยเป็นดังพิสูจน์ไว้ในทฤษฎีบท 2.3 ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

ทฤษฎีบท 2.3 ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ (1) เมื่อ $p \equiv 2 \pmod{3}$ เป็นจำนวนเฉพาะและ $x + y \leq 3$ คือ

$$(x, y, z, p, n) = (0, 3, 3, 2, 0), (3, 0, 3, 2, n), (1, 1, \sqrt{2p+3n}, p, n), (2, 1, \sqrt{p^2+p+3n}, p, n)$$

สำหรับบางจำนวนเต็ม n ที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ, $p, p + 3n$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $\sqrt{2p+3n},$

$\sqrt{p^2+p+3n}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ แบ่งการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี ได้แก่

กรณี 1 $x = 0$

กรณี 2 $y = 0$

และ กรณี 3 $x, y > 0$

กรณี 1 สมมติ $x = 0$ จากสมการ (1) จะได้

$$z^2 - (p + 3n)^y = 1$$

ถ้า $y = 0$ แล้วทำให้ $z^2 = 2$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $y \geq 1$ แบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณีย่อย ได้แก่

กรณี 1.1. $y > 1$

และ กรณี 1.2. $y = 1$

กรณี 1.1. ถ้า $y > 1$ แล้วโดยอาศัยบทตั้ง 1.1 ได้ว่า $y = 3 = z, p + 3n = 2$ ทำให้ $n = 0, p = 2$ จึงได้ว่า $(x, y, z, p, n) = (0, 3, 3, 2, 0)$ เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ (1)

กรณี 1.2. ถ้า $y = 1$ แล้วจะได้

$p + 3n = z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$ เนื่องจาก $p + 3n$ เป็นจำนวนเฉพาะ จึงทำให้ $z - 1 = 1$ และ $z + 1 = p + 3n$ ดังนั้นได้ $z = 2$ และ $p + 3n = 3$ ซึ่งจะได้ $p = 3$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 2 สมมติ $y = 0$ จากสมการไดโอแฟนไทน์

(1) จะได้ $z^2 - p^x = 1$ ถ้า $x = 0$ แล้วทำให้ได้ว่า $z^2 = 2$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $x \geq 1$ จึงแบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณีย่อยเช่นกัน ได้แก่

กรณี 2.1. $x > 1$

และ กรณี 2.2. $x = 1$

กรณี 2.1. ถ้า $x > 1$ แล้วอาศัยบทตั้ง 1.1 ทำให้ได้ว่า $x = 3 = z$ และ $p = 2$ ดังนั้นสำหรับกรณีนี้สมการไดโอแฟนไทน์ (1) มีผลเฉลย (x, y, z, p, n) เป็น

$(3, 0, 3, 2, n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $2 + 3n$ เป็นจำนวนเฉพาะ
กรณี 2.2. ถ้า $x = 1$ แล้วได้ว่า

$$p = z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$$

เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จึงได้ $z = 2$ และ $p = 3$ ซึ่งทำให้เกิดข้อขัดแย้ง สำหรับกรณีนี้ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์ (1) ไม่มีผลเฉลย

กรณี 3 สมมติให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $x + y \leq 3$ สามารถแบ่งการพิจารณาได้เพียง 2 กรณี ได้แก่ กรณี $x = 1$ หรือ $x = 2$ ส่วนกรณี ถ้าให้ $x = 3$ แล้วทำให้ได้ $y = 0$ นั้นได้พิสูจน์ไปแล้วในกรณี 2.1.

กรณี 3.1. สมมติให้ $x = 1$ สามารถแบ่งพิจารณาเป็นกรณีย่อยได้อีก 2 กรณีย่อย ได้แก่ กรณี 3.1.1. $y = 1$ และกรณี 3.1.2. $y = 2$

กรณี 3.1.1. ถ้า $y = 1$ แล้วจากสมการไดโอแฟนไทน์ (1) จะได้ว่า $2p + 3n = z^2$ จึงทำให้ $z = \sqrt{2p + 3n}$ ดังนั้นสมการไดโอแฟนไทน์ (1) มีผลเฉลยเป็น $(x, y, z, p, n) = (1, 1, \sqrt{2p + 3n}, p, n)$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n ที่ไม่เป็นลบ, $p, p + 3n$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $\sqrt{2p + 3n}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

กรณี 3.1.2. ถ้า $y = 2$ แล้วจากสมการไดโอแฟนไทน์ (1) ได้ว่า

$$z^2 = 9n^2 + (6p)n + (p^2 + p)$$

เนื่องจาก $\sqrt{9n^2 + (6p)n + (p^2 + p)}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นสำหรับกรณีนี้สมการไดโอแฟนไทน์ (1) จึงไม่มีผลเฉลย

กรณี 3.2. สมมติให้ $x = 2$ จึงเหลือกรณีที่เป็นไปได้ คือ $y = 1$ จากสมการ (1) จึงได้ $p^2 + p + 3n = z^2$ ทำให้ได้ $z = \sqrt{p^2 + p + 3n}$ ดังนั้นผลเฉลย (x, y, z, p, n) ของสมการไดโอแฟนไทน์ (1) คือ

$(2, 1, \sqrt{p^2 + p + 3n}, p, n)$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n ที่ไม่เป็นลบ, $p, p + 3n$ เป็นจำนวนเฉพาะและ $\sqrt{p^2 + p + 3n}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

จากกรณี 1-3 ข้างต้น พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ (1) มีผลเฉลย ดังนี้

ถ้า $x = 0$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ (1) มีผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z, p, n) = (0, 3, 3, 2, 0)$

ถ้า $y = 0$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ (1) มีผลเฉลยเป็น $(x, y, z, p, n) = (3, 0, 3, 2, n)$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n ที่ไม่เป็นลบและ $2 + 3n$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ส่วนกรณี $y = 1$ สมการไดโอแฟนไทน์ (1) มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z, p, n) คือ

$$(1, 1, \sqrt{2p + 3n}, p, n), (2, 1, \sqrt{p^2 + p + 3n}, p, n)$$

สำหรับบางจำนวนเต็ม n ที่ไม่เป็นลบ, $p, p + 3n$ เป็นจำนวนเฉพาะและ $\sqrt{2p + 3n}, \sqrt{p^2 + p + 3n}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

บทแทรก 2.4 สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 5^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เพียง 2 ผลเฉลย คือ $(3, 0, 3)$ และ $(2, 1, 3)$

พิสูจน์ อาศัยทฤษฎีบท 2.3 ให้ $n = 1$ ได้ผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (3, 0, 3)$ และ $(x, y, z) = (2, 1, 3)$

เห็นได้ว่าบทแทรก 2.4 เป็นผลที่ได้มาจากทฤษฎีบท 2.3 และเรายังพบว่าผลเฉลยตรงกับที่ Acu D. [1] ได้เคยพิสูจน์ไว้ปี ค.ศ. 2007

บทแทรก 2.5 สมการไดโอแฟนไทน์ $11^x + 23^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ $(2, 1, 12)$

พิสูจน์ อาศัยทฤษฎีบท 2.3 ให้ $n = 4$ ได้ว่า $x = 2, y = 1$ และ $z = 12$

จากบทแทรก 2.5 และผลจากการศึกษา
สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+12)^y = z^2$ ในปี
ค.ศ. 2023 [6] จึงได้ข้อสรุปว่าสมการนี้มีผลเฉลย
(x,y,z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว
คือ (2, 1, 12)

บทแทรก 2.6 สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 11^y = z^2$
มีผลเฉลย (x,y,z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ
เพียงผลเฉลยเดียว คือ (3, 0, 3)

พิสูจน์ เป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบท 2.3 ให้ $n = 3$
และยังพบว่าผลเฉลยในบทแทรก 2.6 ตรง
กับการศึกษาของ Chotchaisthit S. [2] ในปี ค.ศ.
2013 เช่นกัน

บทแทรก 2.7 สมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 31^y = z^2$
ไม่มีผลเฉลย (x,y,z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ เป็นผลจากทฤษฎีบท 2.1 และเนื่องจาก
 $7 \equiv 1 \pmod{3}$

บทแทรก 2.8 สมการไดโอแฟนไทน์ $13^x + 31^y = z^2$
ไม่มีผลเฉลย (x,y,z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ เป็นผลจากทฤษฎีบท 2.1 และเนื่องจาก
 $13 \equiv 1 \pmod{3}$

จะเห็นได้ว่าบทแทรก 2.7 นี้เป็นไปตาม
การศึกษาของ Sroysang B. [3] ในปี ค.ศ. 2014
ทำนองเดียวกันบทแทรก 2.8 เป็นจริงตามการพิสูจน์
ของ Sugandha A., Tripena A. และ Prabowo A.
[4] ซึ่งคณะผู้วิจัยได้เคยศึกษาไว้ในปี ค.ศ. 2019

บทแทรก 2.9 สมการไดโอแฟนไทน์

$$17^x + 83^y = z^2 \text{ และ } 29^x + 71^y = z^2$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลย
เดียว คือ (x,y,z) = (1, 1, 10)

พิสูจน์ เป็นผลจากทฤษฎีบท 2.3 ให้ $n = 22$
และ $n = 14$ ตามลำดับ

พบว่าบทแทรก 2.9 นี้เป็นไปตามการศึกษา
ของ Paisal K. และ Chayapham P. [5] ซึ่งทั้งสอง
ท่านได้ศึกษาไว้ในปี ค.ศ. 2021 เช่นกัน

3.บทสรุปและอภิปรายผล

จากการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์
 $p^x + (p+3n)^y = z^2$ เมื่อ x,y,z,n เป็นจำนวน
เต็มที่ไม่เป็นลบและ $p, p+3n$ เป็นจำนวนเฉพาะ
เราพบว่า สมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่
เป็นจำนวนเต็มลบเฉพาะกรณี $p \equiv 0 \pmod{3}$ และ
กรณี $p \equiv 2 \pmod{3}$ และพบว่าสมการนี้ไม่มีผล
เฉลยในกรณี $p \equiv 1 \pmod{3}$

ถ้า $p \equiv 0 \pmod{3}$ แล้วผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่
เป็นลบ (x,y,z) ของสมการไดโอแฟนไทน์
 $3^x + 3^y = z^2$ คือ $(2k, 2k+1, 2 \cdot 3^k)$ เมื่อ k
เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ถ้า $p \equiv 2 \pmod{3}$ แล้วสมการไดโอแฟน
ไทน์ $p^x + (p+3n)^y = z^2$ มีหลายผลเฉลย เมื่อ
 x,y,z,n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบโดยที่
 $x+y \leq 3$ และ $p, p+3n$ เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง
ผลเฉลยของสมการนี้เป็นดังนี้

$$(x,y,z,p,n) = (0, 3, 3, 2, 0), (3, 0, 3, 2, n), \\ (1, 1, \sqrt{2p+3n}, p, n), (2, 1, \sqrt{p^2+p+3n}, p, n)$$

สำหรับบางจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ $n, p, p+3n$
เป็นจำนวนเฉพาะและ $\sqrt{2p+3n}, \sqrt{p^2+p+3n}$
เป็นจำนวนเต็มบวก

นอกจากนี้ยังเห็นได้ว่า ผลจากการศึกษานี้ยังคง
สอดคล้องกับผลการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์บาง
สมการที่ได้เคยมีผู้ศึกษาวิจัยและพิสูจน์มาก่อนหน้า
แล้วด้วย

สำหรับตัวอย่างผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 3n)^y = z^2$ เมื่อ $p, p + 3n$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในกรณีต่าง ๆ เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 กรณี $p \equiv 0 \pmod{3}$ และ $n = 0$

x	y	z	p	n
0	1	2	3	0
2	3	6	3	0
4	5	18	3	0
x	y	z	p	n
6	7	54	3	0
8	9	162	3	0
10	11	486	3	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 2 กรณี $p \equiv 2 \pmod{3}$ และ $x + y \leq 3$
เมื่อ $x = 0$ และ $y = 3$

x	y	z	p	n
0	3	3	2	0

ตารางที่ 3 กรณี $p \equiv 2 \pmod{3}$ และ $x + y \leq 3$
เมื่อ $x = 1$ และ $y = 1$

x	y	z	p	n
1	1	2	2	0
1	1	25	2	7
1	1	49	2	15
1	1	64	11	14
1	1	64	23	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 4 กรณี $p \equiv 2 \pmod{3}$ และ $x + y \leq 3$
เมื่อ $x = 2$ และ $y = 1$

x	y	z	p	n
2	1	3	2	1
2	1	6	5	2
2	1	12	11	4
2	1	24	23	8
2	1	30	29	10
x	y	z	p	n
2	1	42	41	14
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 5 กรณี $p \equiv 2 \pmod{3}$ และ $x + y \leq 3$
เมื่อ $x = 3$ และ $y = 0$

x	y	z	p	n
3	0	3	2	0
3	0	3	2	1
3	0	3	2	3
3	0	3	2	5
3	0	3	2	7
3	0	3	2	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

4 กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณโครงการห้องเรียนวิทยาศาสตร์ในโรงเรียน โดยการกำกับดูแลของมหาวิทยาลัย โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย รังสิต คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ที่ให้การสนับสนุนให้เกิิดงานวิจัยนี้ และขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ อรรถวุฒิ วงศ์ประดิษฐ์ และ อาจารย์ ดร.ชยธร วนาสวัสดิ์ ที่ให้คำแนะนำต่าง ๆ ที่เป็นประโยชน์กับงานวิจัยนี้ จนกระทั่งงานนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

5 เอกสารอ้างอิง

- [1] Acu, D. On a Diophantine equation $2^x + 5^y = z^2$. General Mathematics. 2007; 15(4): 145-148.
- [2] Chotchaisthit, S. On the Diophantine equation $2^x + 11^y = z^2$. Maejo International Journal of Science and Technology. 2013; 7(2): 291-293.
- [3] Sroysang, B. On the Diophantine Equation $7^x + 31^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2014; 92(1): 109-112.
- [4] Sugandha, A., Tripena A. and Prabowo, A. Solution to Non-Linear Exponential Diophantine Equation $13^x + 31^y = z^2$. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 1179:012002. 2019 [cited 2024 Jan 20]. Available from: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1179/1/012002>
- [5] Paisal, K. and Chayapham, P. On the exponential Diophantine equation $17^x + 83^y = z^2$ and $29^x + 71^y = z^2$. Journal of Physics: Conference Series 2070 012015. 2021. [cited 2024 Jan 20] Available from: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2070/1/012015/pdf>
- [6] Vesarachasart, S., Eiemrawd, C., Thiengtham, S. and Mounkun, A. On the Diophantine Equation $p^x + (p + 12)^y = z^2$ where p and $p + 12$ are prime numbers. Thai Journal of Science and Technology. 2023; 12(1): 514-521.
- [7] Mihailescu, P. Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 2004; 27: 167-195