

การวิเคราะห์ความสมมาตรของลวดลายจำหลักที่ปรากฏใน
ปราสาทเมืองต่ำ อุทยานประวัติศาสตร์พนมรุ้ง
และอุทยานประวัติศาสตร์พิมาย
Symmetry Analysis of Carving Patterns in Muang Tam Prasat,
Phanomrung Historical Park and Phimai Historical Park

ธีรวัต ดงพิกิจ¹

สุพัฒน์ สายบุตร²

สำคัญ ฮ่อบรรทัด³

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์หลักเพื่อศึกษาและจัดจำแนกรูปแบบของลวดลายจำหลักที่ปรากฏในปราสาทเมืองต่ำ อุทยานประวัติศาสตร์พนมรุ้ง และอุทยานประวัติศาสตร์พิมาย โดยขั้นตอนการวิเคราะห์มีพื้นฐานบนกรุปการหมุนรูป กรุปการทำซ้ำรูปทิศทางเดียว และกรุปการทำซ้ำรูปสองทิศทาง ซึ่งทุกลวดลายของปราสาททั้งสามแห่ง จะถูกจำลองด้วยโปรแกรม GSP ก่อนการจำแนก ผลการศึกษาพบว่า ทั้งสามปราสาทไม่พบลวดลายที่มีการทำซ้ำรูปสองทิศทาง และพบลวดลายการทำซ้ำรูปทิศทางเดียวมากที่สุด ร้อยละ 97.50 ของลวดลายที่ศึกษาทั้งหมด โดยพบความสมมาตรประเภท $p1m1$, $p2mm$, $p111$ และ $p1m1$ ลดลงตามลำดับ และไม่พบความสมมาตรประเภท $p2mg$, $p11g$ และ $p211$ นอกนั้นจะพบลวดลายบนกรุปการหมุนรูปประเภท D_8 ร้อยละ 2.50

คำสำคัญ : ลายจำหลัก ปราสาทหิน กรุปการหมุน กรุปการทำซ้ำรูปทิศทางเดียว
กรุปการทำซ้ำรูปสองทิศทาง

1 นักศึกษา สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

2 นักศึกษา สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

3 ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

Abstract

The main purpose of this research is to study and classify of carving patterns of Muang Tam Prasat, Phanomrung Historical Park and Phimai Historical Park. Algorithm analysis bases on dihedral groups, frieze groups and wallpaper groups. Before classification, all of pattern are simulated by using GSP program. The results found that there were no wallpaper pattern. The most appearances are frieze pattern, 97.50 percentage of all patterns. The most found type was $p1m1$, $p2mm$, $p111$ and $p11m$ respectively. The frieze patterns $p2mg$, $p11g$ and $p211$ were not found. Otherwise, 2.50 percentage of carving patterns are the dihedral pattern type D_8 .

Keyword: Carving Pattern, Stone Castle, Dihedral Group, Frieze Group, Wallpaper Group

บทนำ

กำหนดให้ G เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค (Binary Operation) เราจะกล่าวว่า $(G,*)$ เป็นกรุป (Group) ถ้ามีคุณสมบัติ 1) คุณสมบัติปิด (Closed) 2) คุณสมบัติเปลี่ยนหมู่ (Associative) 3) คุณสมบัติการมีเอกลักษณ์ (Identity) 4) คุณสมบัติการมีตัวผกผัน (Inverse) พื้นฐานทฤษฎีกรุปถูกนำมาแก้ปัญหาต่าง ๆ ในทางคณิตศาสตร์หลากหลายด้าน เช่น ทฤษฎีจำนวน ทฤษฎีรหัส รวมถึงทฤษฎีทางเรขาคณิต ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการจำแนกรูปแบบการสมมาตรของบทความนี้

การสร้างกรุปการหมุนรูปในทางเรขาคณิตถูกกำหนดขึ้นจากการให้ X เป็นเซตของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\mathbb{R}^2$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^2$ และ $\circ$ เป็นการดำเนินการคอมโพสิท โดยที่ Nagpaul and others (2005) ได้แสดงว่า $(X,\circ)$ เป็นกรุป รวมถึงให้นิยามเซตของฟังก์ชันที่รักษาระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ดังบทนิยามที่ 1

บทนิยามที่ 1 เราจะกล่าวว่า $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ เป็นสมมติ (Isometry) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่รักษาระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใด ๆ บนระนาบ นั่นคือ

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \text{ สำหรับทุก ๆ } x, y \in \mathbb{R}^2$$

และให้ $Isom(\mathbb{R}^2)$ แทนเซตของสมมติทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $a \in \mathbb{R}^2$ และ $t_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ กำหนดโดย $t_a(x) = x + a$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}^2$ เป็นฟังก์ชันการเลื่อนขนานโดย a เมื่อกำหนดให้ x และ y เป็นจุดใด ๆ ใน $\mathbb{R}^2$ จะได้ว่า

$$|t_a(x) - t_a(y)| = |(x + a) - (y + a)| = |x - y|$$

ดังนั้น t_a เป็นฟังก์ชันที่คงสภาพระยะทาง จึงได้ว่า t_a เป็นสมมติบน $\mathbb{R}^2$ นั่นคือ $t_a \in Isom\mathbb{R}^2$

ยิ่งไปกว่านั้น Nagpaul and others (2015) ได้แสดงว่า $Isom\mathbb{R}^2$ เป็นกรุปย่อย (Subgroup) ของ X นอกจากนี้ Marshall and others (2004) สามารถแสดงได้ว่าสมมิตีมีได้เพียง 4 รูปแบบเท่านั้น ซึ่งได้แก่ การเลื่อนขนาน (Translation) การหมุน (Rotation) การสะท้อน (Reflection) และการสะท้อนแบบเลื่อน (Glide Reflection) รวมถึงได้ให้นิยามเซตของสมมติที่ส่งเซตของจุดบนรูปในระนาบดังบทนิยามที่ 2

บทนิยามที่ 2 ให้ P เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและเป็นเซตย่อยของเซตของจุดบนระนาบ ให้ $Sym(P)$ เป็นเซตย่อยของ $Isom\mathbb{R}^2$ ที่นิยามโดย

$$Sym(P) = \{\alpha \in Isom(\mathbb{R}^2) | \alpha(p) = p\}$$

นั่นคือ $\alpha(p) = p$ สำหรับทุก ๆ $p \in P$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $P = \{(1,3), (1,1), (3,1), (3,3), (-1,-3), (-1,-1), (-3,-1), (-3,-3)\}$

นิยามฟังก์ชัน $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ดังนี้

$$f((x,y)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-x, -y) \quad \text{สำหรับทุก } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

จะได้ว่า $f((x,y))$ แสดงผลดังตารางด้านล่าง

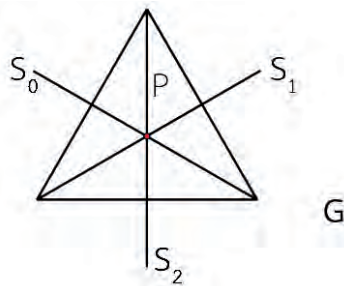
(x,y)	(1,3)	(1,1)	(3,1)	(3,3)	(-1,-3)	(-1,-1)	(-3,-1)	(-3,-3)
$f(x,y)$	(-1,-3)	(-1,-1)	(-3,-1)	(-3,-3)	(1,3)	(1,1)	(3,1)	(3,3)

ดังนั้น $f \in \text{Sym}(P)$

หากพิจารณาภายใต้การดำเนินการคอมโพสิท Marshall and others (2004) สามารถแสดงได้ว่า $\text{Sym}(P)$ เป็นกรุปย่อยของ $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ นอกจากนี้เมื่อพิจารณารูป n เหลี่ยมปกติ ร่วมกับนิยามของ $\text{Sym}(P)$ สามารถนิยามกรุปการหมุนรูปของรูป n เหลี่ยมปกติ ดังนี้ (Gallian. 2012)

บทนิยามที่ 3 สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $n \geq 3$ จะใช้สัญลักษณ์ D_n แทนกรุปสมมาตรของรูป n เหลี่ยมปกติ (Regular Polygon) และเรียกกรุปสมมาตรของรูป n เหลี่ยมปกติว่ากรุปการหมุนรูป (Dihedral Group)

ตัวอย่างที่ 3 พิจารณารูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า G



ให้ P เป็นจุดศูนย์กลางการหมุน r_0 แทนการหมุน 0° (เอกลักษณ์) r_1 แทนการหมุนทวนเข็มนาฬิกา 120° และ r_2 แทนการหมุนทวนเข็มนาฬิกา 180° และให้ S_0, S_1 และ S_2 แทนแกนการสะท้อนตามลำดับ นั่นคือ $\text{Sym}(G) = \{r_0, r_1, r_2, S_0, S_1, S_2\}$ และ $\circ$ แทนการดำเนินการคอมโพสิท เราจะได้ตารางการดำเนินการดังนี้

$\circ$	r_0	r_1	r_2	S_0	S_1	S_2
r_0	r_0	r_1	r_2	S_0	S_1	S_2
r_1	r_1	r_2	r_0	S_1	S_2	S_0
r_2	r_2	r_0	r_1	S_2	S_0	S_1
S_0	S_0	S_2	S_1	r_0	r_2	r_1
S_1	S_1	S_0	S_2	r_1	r_0	r_2
S_2	S_2	S_1	S_0	r_2	r_1	r_0

ดังนั้น $\text{Sym}(G)$ เป็นกรุปการหมุนรูป D_3

Marshall and others (2004) ได้ให้นิยาม O_2 ดังนี้

บทนิยามที่ 4 กำหนดให้ O_2 คือเซตของเมทริกซ์มิติ 2×2 ทั้งหมดอยู่ในรูป

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{หรือ} \quad M_{\theta/2} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

โดยที่ R_θ เป็นเมทริกซ์การหมุนด้วยมุม θ เรเดียรอบจุดกำเนิดและ $M_{\theta/2}$ เป็นเมทริกซ์การสะท้อนข้ามเส้นตรง ที่ผ่านจุดกำเนิดและทำมุม $\theta/2$ เรเดียนกับแกน X

จากบทนิยามที่ 4 เมื่อกำหนด $\theta = \pi$ จะพบว่า $R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเดียวกันกับฟังก์ชัน f ในตัวอย่างที่ 2

ให้ $O_2 = \{g \in Isom(\mathbb{R}^2) | g(0) = 0\}$ ถ้า H เป็นกรุปย่อยของ $Isom \mathbb{R}^2$ และ $t_H = t \cap H$ โดยที่ t เป็นเซตของการเลื่อนขนานทั้งหมดใน $Isom(\mathbb{R}^2)$ นิยาม $\pi: Isom(\mathbb{R}^2) \rightarrow O_2$ เป็นฟังก์ชันที่ลดขนาดโดเมน (Restrict) เท่ากับ H จะได้ว่า เคอร์เนล (Kernel) ของฟังก์ชันที่ลดขนาดโดเมนลงมา คือ กรุปย่อย t_H จากทฤษฎีหลักมูลไอโซมอร์ฟิซึม (First Isomorphism Theorem) จะได้ว่า $\pi(H) \cong \frac{H}{t_H}$ (Marshall and others. 2004) นอกจากนี้ Marshall and others. (2004) ได้ให้นิยาม พอยท์กรุป (Point Group) และกรุปการทำซ้ำรูปทิศทางเดียว (Frieze Group) ดังนี้

บทนิยามที่ 5 ถ้า H เป็นกรุปย่อยของ $Isom(\mathbb{R}^2)$ จะเรียกกรุป $\pi(H)$ ว่าพอยท์กรุปของ H

บทนิยามที่ 6 สำหรับกรุปย่อย H ของ $Isom(\mathbb{R}^2)$ จะถูกเรียกว่า กรุปการทำซ้ำรูปทิศทางเดียวถ้า

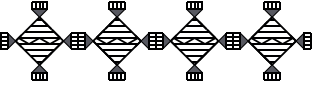
- 1) กรุปย่อย t_H ของ H เป็นกรุปวัฏจักรอนันต์ ที่ก่อกำเนิดโดยหนึ่งเวกเตอร์ใด ๆ นั่นคือ $t_H = \langle t_b \rangle$ สำหรับบาง $b \in \mathbb{R}^2$
- 2) พอยท์กรุป H เป็นกรุปจำกัด

Stolarski (2010) ได้กล่าวถึงทฤษฎีบท กรุปการทำซ้ำรูปทิศทางเดียว ดังนี้

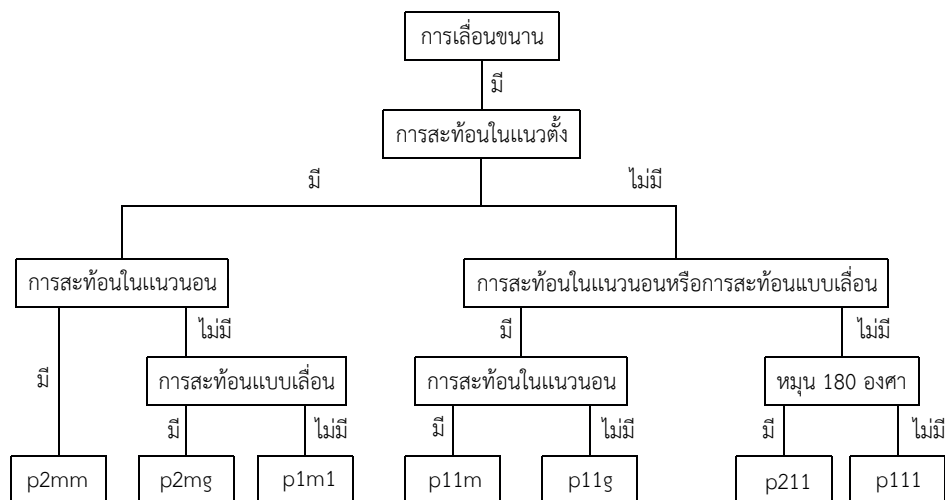
บทนิยามที่ 7 กรุปการทำซ้ำรูปทิศทางเดียวมีเพียง 7 รูปแบบเท่านั้น

เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ จะใช้สัญลักษณ์ t แทนการเลื่อนขนาน h แทนการสะท้อนแนวนอน v แทนการสะท้อนแนวตั้ง g แทนการสะท้อนแบบเลื่อน และ p แทนการหมุนด้วยมุม 180° รอบจุดศูนย์กลาง P จากทฤษฎีบทที่ 7 และ Gallian (2012) เราสามารถจำแนกรูปแบบทั้งหมดดังแสดงใน ตารางที่ 1 โดยกำหนดชื่อตามระบบของ IUCr (International Union of Crystallography)

ตารางที่ 1 Notations of Frieze Group, Members of Frieze Group and Example of frieze pattern.

สัญลักษณ์ตาม ระบบ IUCr	สมาชิกในกลุ่ม	ตัวอย่างลวดลายของ กรุปการทำซ้ำรูป ทิศทางเดียว
$p111$	$\{t^n n \in \mathbb{Z}\}$	e e e e e
$p11m$	$\{t^n h^m n \in \mathbb{Z}, m = 0,1\}$	
$p1m1$	$\{t^n v^m n \in \mathbb{Z}, m = 0,1\}$	
$p211$	$\{t^n \rho^m n \in \mathbb{Z}, m = 0,1\}$	
$p2mm$	$\{t^n h^m v^k n \in \mathbb{Z}, m = 0,1, k = 0,1\}$	
$p2mg$	$\{g^n \rho^m n \in \mathbb{Z}, m = 0,1\}$	
$p11g$	$\{g^n n \in \mathbb{Z}\}$	

และสามารถคัดแยกรูปแบบการสมมาตรตามแผนผังการคัดแยก ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 : A Diagram for Frieze Group (Aslaksen. 2002)

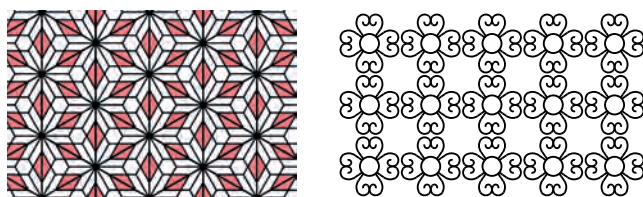
Marshall (2004) ได้ให้นิยาม กรุปการทำซ้ำรูปสองทิศทาง (Wallpaper Group) ดังนี้

บทนิยามที่ 8 สำหรับกรุปย่อย H ของ $Isom(\mathbb{R}^2)$ จะถูกเรียกว่า กรุปการทำซ้ำรูปสองทิศทางถ้า

1) กรุปย่อย t_H ของ H เป็นกรุปวัฏจักรอนันต์ ที่ก่อกำเนิดโดยสองเวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันนั่นคือ $t_H = \langle t_b, t_c \rangle$ โดยที่ b และ c เป็นสองเวกเตอร์ใด ๆ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันบนระนาบ

2) พอยท์กรุป $\pi(G)$ เป็นเซตจำกัด

กรุปการทำซ้ำรูปสองทิศทาง คือรูปแบบของลวดลายที่มีการเคลื่อนตัวตามแลตทิซ ดังตัวอย่างในภาพประกอบ 2



(a)

(b)

ภาพประกอบ 2 : (a) Example of Wallpaper Group $p6m$ and (b) Example of Wallpaper Group $p4m$.

สำหรับบทความนี้จะกล่าวถึงการจำแนกหมวดลายสมมาตรแบบเลื่อนลายสองทิศทางเนื่องจากหมวดลายจำหลักในปราสาททั้งสามแห่งที่ทำการสำรวจไม่พบความสมมาตรประเภทนี้จากรูปแบบการสมมาตรทั้งหมดที่กล่าวมา ทำให้มีนักวิจัยส่วนหนึ่งให้ความสนใจในการสำรวจรูปแบบความสมมาตรของหมวดลายทั้งในผ้าทอโบราณและโบราณสถานที่ปรากฏในที่ต่าง ๆ ทั่วโลก เช่น การศึกษาและจำแนกรูปแบบความสมมาตรในพระราชวังอัลัมบรา (Alhambra) ประเทศสเปน (Bodner. 2007; Blanco and others. 2011; Grünbaum. 2006) การศึกษาและจำแนกรูปแบบความสมมาตรในมัสยิดใหญ่สุลต่านกาบูส (Sultan Qaboos Grand Mosque) (Glenn. 2014) การศึกษาและจำแนกรูปแบบความสมมาตร ผ้าทอมือโบราณ Songket (Abdul and others. 2016; Norakmal and others. 2015) การศึกษาและจำแนกรูปแบบความสมมาตรบนผ้ากรีกโบราณ (Lila and others. 2018) เป็นต้น

สำหรับประเทศไทยในกลุ่มจังหวัดอีสานใต้มีสถาปัตยกรรมที่มีชื่อเสียงเช่นเดียวกันกับที่อื่นทั่วโลก ได้แก่ อุทยานประวัติศาสตร์พิมาย อุทยานประวัติศาสตร์พนมรุ้ง ปราสาทเมืองแขก ปราสาทศีขรภูมิ กลุ่มปราสาทตาเมื่อง ปราสาทหินพนมวัน และปราสาทเมืองต่ำ (ศรีสุภา มีวงษ์. 2552) ดังนั้น คณะผู้วิจัยสนใจศึกษารูปแบบความสมมาตรของหมวดลายบนปราสาทโบราณที่ปรากฏในพื้นที่กลุ่มอีสานใต้ ซึ่งกำหนดขอบเขตของการศึกษาเฉพาะปราสาทเมืองต่ำ อุทยานประวัติศาสตร์พนมรุ้ง และอุทยานประวัติศาสตร์พิมาย เพื่อการอนุรักษ์ และสืบหาความเชื่อมโยงของอัจฉริยภาพในการออกแบบหมวดลายของบรรพบุรุษ

วิธีดำเนินงานวิจัย

การวิเคราะห์ความสมมาตรของหมวดลายในปราสาทกลุ่มอีสานใต้มีกระบวนการศึกษา ดังนี้

- 1) สำรวจแหล่งที่ตั้งสถานที่พร้อมถ่ายภาพและเก็บข้อมูลเบื้องต้นของปราสาททั้ง 3 แห่งประกอบไปด้วย ปราสาทเมืองต่ำ อุทยานประวัติศาสตร์พนมรุ้ง และอุทยานประวัติศาสตร์พิมาย
- 2) คัดเลือกรูปภาพและศึกษาหมวดลายจำหลัก 3) จำลองหมวดลายจำหลักจากภาพถ่ายด้วยโปรแกรม GSP 4) จำแนกรูปแบบความสมมาตรของหมวดลายจำหลักด้วยแผนผังการคัดแยก
- 5) วิเคราะห์ข้อมูลและรายงานผล

ผลการวิจัย

ปราสาทเมืองต่ำ อุทยานประวัติศาสตร์พนมรุ้ง และอุทยานประวัติศาสตร์พิมาย ถูกสร้างเมื่อพุทธศตวรรษที่ 16 ถึงพุทธศตวรรษที่ 17 ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกันในหลาย ๆ ด้าน เช่น แผนผังของปราสาท สถานที่ตั้งของปราสาท ลวดลายที่พบในปราสาท ดังภาพประกอบ 3



(a)



(b)

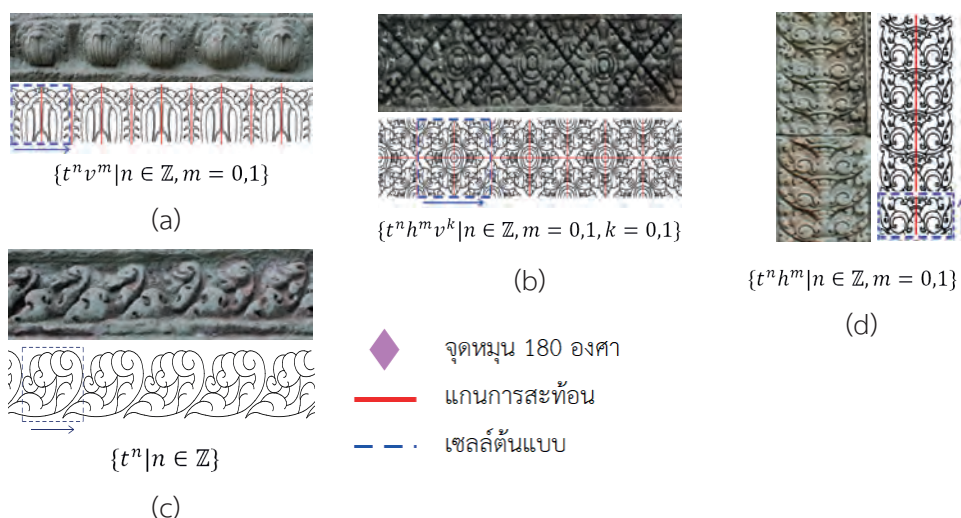


(c)

ภาพประกอบ 3 : (a) Muang Tam Prasat, (b) Phanomrung Historical Park, (c) Phimai Historical Park.

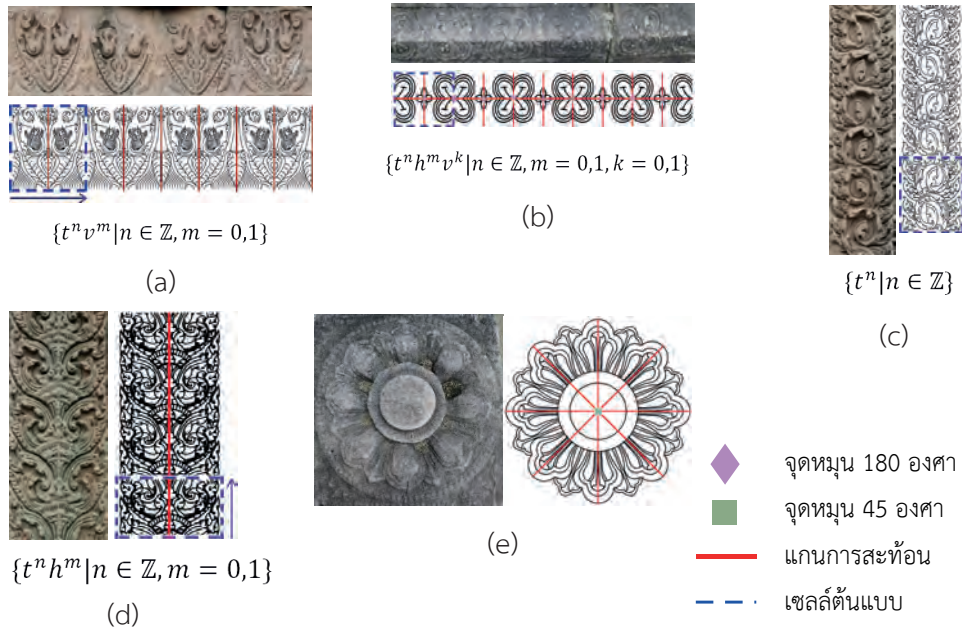
ลวดลายที่พบในปราสาท คือ ลวดลายจำหลัก เกิดจากการแกะสลักหินหรือเรียกว่า การจำหลัก ทำให้หินมีลวดลายต่าง ๆ ขึ้น ตามที่ผู้จำหลักนั้นต้องการ ซึ่งสามารถจำแนกแต่ละปราสาทดังนี้

ปราสาทเมืองต่ำ ด้วยระยะเวลาในการสร้างที่ผ่านมายาวนานทำให้ลวดลายได้เลือนหายไป ซึ่งลวดลายที่พบมีการสมมาตรแบบการทำซ้ำรูปทิศทางเดียวเท่านั้น เมื่อทำการวิเคราะห์พบว่า ประเภทของลวดลายที่มีการทำซ้ำรูปทิศทางเดียวที่พบมากที่สุดคือประเภท $p1m1$ จำนวน 3 ลวดลาย คิดเป็นร้อยละ 33.33 นอกจากนี้ยังพบการทำซ้ำรูปทิศทางเดียวประเภท $p111$, $p2mm$ และ $p11m$ จำนวนประเภทละ 2 ลวดลาย คิดเป็นร้อยละ 22.22 ตัวอย่างลวดลาย ดังภาพประกอบ 4



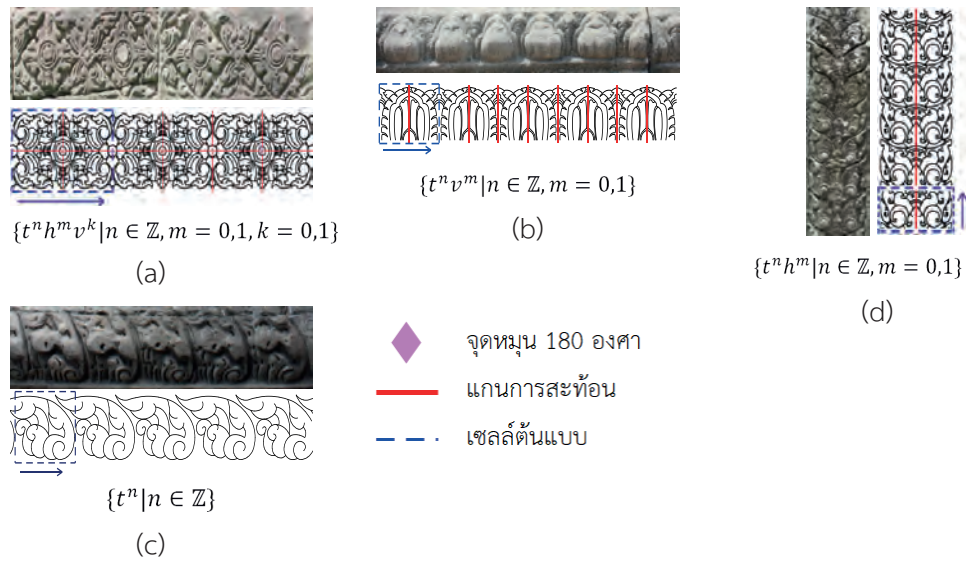
ภาพประกอบ 4 : (a) Example of Frieze Group $p1m1$ in Muang Tam Prasat, (b) Example of Frieze Group $p2mm$ in Muang Tam Prasat, (c) Example of Frieze Group $p111$ in Muang Tam Prasat and (d) Example of Frieze Group $p11m$ in Muang Tam Prasat

อุทยานประวัติศาสตร์พนมรุ้งหรือปราสาทพนมรุ้ง นับเป็นปราสาทที่มีลวดลายเยาะที่สดในปราสาททั้ง 3 แห่งที่ผู้วิจัยได้เก็บข้อมูลมา พบว่าประกอบไปด้วยลวดลายการสมมาตรแบบการทำซ้ำรูปทิศทางเดียว เมื่อทำการวิเคราะห์พบว่าประเภทของลวดลายที่มีการสมมาตรแบบการทำซ้ำรูปทิศทางเดียวที่พบมากที่สุดคือประเภท $p1m1$ จำนวน 9 ลวดลาย คิดเป็นร้อยละ 47.37 ประเภท $p2mm$ จำนวน 4 ลวดลาย คิดเป็นร้อยละ 21.05 ประเภท $p111$ จำนวน 3 ลวดลาย คิดเป็นร้อยละ 15.79 ประเภท $p11m$ จำนวน 2 ลวดลาย คิดเป็นร้อยละ 10.53 นอกจากนี้ยังพบการสมมาตรแบบการหมุนรูปประเภท D_8 จำนวน 1 ลวดลาย คิดเป็นร้อยละ 5.26 ตัวอย่างลวดลาย ดังภาพประกอบ 5



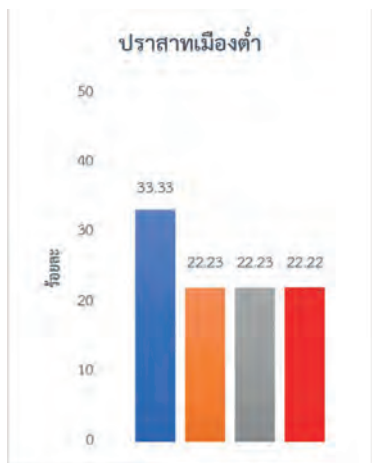
ภาพประกอบ 5 : (a) Example of Frieze Group $p1m1$ in Phanomrung Historical Park,
 (b) Example of Frieze Group $p2mm$ in Phanomrung Historical Park,
 (c) Example of Frieze Group $p111$ in Phanomrung Historical Park,
 (d) Example of Frieze Group $p11m$ in Phanomrung Historical Park and
 (d) Example of Dihedral Group D_8 in Phanomrung Historical Park.

อุทยานประวัติศาสตร์พิมายหรือปราสาทพิมาย เป็นปราสาทที่ค่อนข้างจะพิเศษต่างไปจากปราสาทอื่น ๆ คือในขณะที่ปราสาทอื่นส่วนใหญ่ หันหน้าไปทางทิศตะวันออก แต่ปราสาทพิมายกลับสร้างหันหน้าไปทางทิศใต้ ทั้งนี้ สันนิฐานกันว่าคงจะสร้างหันหน้าไปสู่เมืองพระนคร เมืองหลวงของอาณาจักรขอม (จันยา มาณะวิท และคณะ. 2554) และลวดลายที่พบในปราสาทพิมายก็ยังคงคล้ายคลึงกับปราสาทเมืองต่ำ และปราสาทพนมรุ้ง แต่จะมีความหลากหลายน้อยกว่าปราสาทพนมรุ้ง ซึ่งคาดว่าเกิดจากช่างผู้ทำการจำหลัก ลวดลายที่พบในปราสาทพิมายมีการสมมาตรแบบเลื่อนลายทิศทางเดียวเท่านั้น เมื่อทำการวิเคราะห์พบว่าประเภทของลวดลายที่มีการสมมาตรแบบเลื่อนลายทิศทางเดียวที่พบมากที่สุดคือประเภท $p2mm$ จำนวน 5 ลวดลาย คิดเป็นร้อยละ 41.67 ประเภท $p1m1$ จำนวน 3 ลวดลาย คิดเป็นร้อยละ 25.00 ประเภท $p111$ จำนวน 3 ลวดลาย คิดเป็นร้อยละ 25.00 และประเภท $p11m$ จำนวน 1 ลวดลาย คิดเป็นร้อยละ 8.33 ตัวอย่างลวดลาย ดังภาพประกอบ 6



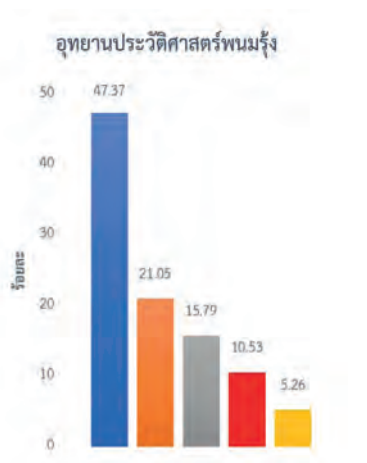
ภาพประกอบ 6 : (a) Example of Frieze Group type $p2mm$ of Phimai Historical Park,
 (b) Example of Frieze Group type $p1m1$ of Phimai Historical Park,
 (c) Example of Frieze Group type $p111$ of Phimai Historical Park and
 (d) Example of Frieze Group type $p11m$ of Phimai Historical Park.

สามารถวาดกราฟเพื่อแสดงปริมาณลวดลายที่มีการสมมาตรรูปแบบต่าง ๆ ได้ ดังภาพประกอบ 7



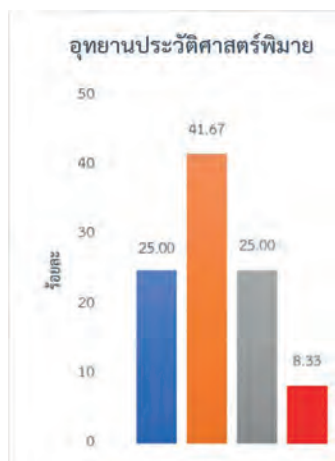
■ p1m1 ■ p2mm ■ p111 ■ p11m

(a)



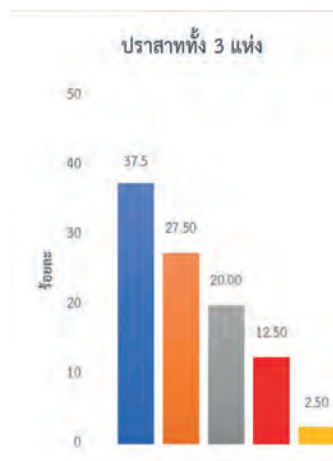
■ p1m1 ■ p2mm ■ p111 ■ p11m ■ D8

(b)



■ p1m1 ■ p2mm ■ p111 ■ p11m

(c)



■ p1m1 ■ p2mm ■ p111 ■ p11m ■ D8

(d)

ภาพประกอบ 7 : (a) Comparison of Muang Tam Prasat, (b) Comparison of Phanomrung Historical Park, (c) Comparison of Phimai Historical Park and (d) All pattern of Muang Tam Prasat Phanomrung Historical Park and Phimai Historical Park.

เมื่อพิจารณาผลลายจำหลักทั้ง 3 แห่งพบรูปการหมุนรูปประเภท D_8 เพียงร้อยละ 2.50 และความสมมาตรการทำซ้ำรูปทิศทางเดียว ร้อยละ 97.50 โดยพบประเภท $p1m1$ มากที่สุด ร้อยละ 37.50 นอกนั้นจะพบความสมมาตรประเภท $p2mm$ ร้อยละ 27.50 ประเภท $p111$ ร้อยละ 20.00 ประเภท $p11m$ ร้อยละ 12.50 และไม่พบความสมมาตรประเภท $p2mg$, $p11g$ และ $p211$ ซึ่งแตกต่างกับพระราชวังอัลัมบรา (Alhambra) มีความสมมาตรการทำซ้ำรูปทิศทางเดียว ครบทั้ง 7 ประเภท (Lynn Bodner. 2007) และมีความสมมาตรการทำซ้ำรูปสองทิศทาง ครบทั้ง 17 ประเภท (Blanco Blanco and others. 2011) เช่นกัน ส่วนในมัสยิดใหญ่สุลต่านกาบูส (Sultan Qaboos Grand Mosque) มีรูปการหมุนรูปประเภท D_1 , D_8 , D_{12} และ D_{16} พบความสมมาตรการทำซ้ำรูปทิศทางเดียว 6 ประเภท คือ $p111$, $p11m$, $p1m1$, $p211$, $p2mm$ และ $p2mg$ แต่ไม่พบความสมมาตรการทำซ้ำรูปทิศทางเดียวประเภท $p11g$ และมีความสมมาตรการทำซ้ำรูปสองทิศทางทิศทางเพียง 8 ประเภท คือ pm, cm, pmm, cmm, p2, p4, p4m และ $p4g$ (Glenn. 2014)

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ผลลายจำหลักของปราสาทเมืองต่ำ อุทยานประวัติศาสตร์พนมรุ้ง และอุทยานประวัติศาสตร์พิมาย พบผลลายบนรูปการทำซ้ำรูปทิศทางเดียวเกือบทั้งหมด นอกนั้นจะพบผลลายบนรูปการหมุนรูป และไม่พบผลลายบนรูปการทำซ้ำรูปสองทิศทาง ซึ่งถือได้ว่าผลลายของทั้งสามปราสาทมีความหลากหลายค่อนข้างน้อย เมื่อเทียบกับพระราชวังอัลัมบรา และมัสยิดใหญ่สุลต่านกาบูส อาจเป็นเพราะความเชื่อทางศาสนาที่แตกต่างกัน ทั้งนี้ยังจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องศึกษาผลลายในปราสาทหินที่ปรากฏในกลุ่มอีสานใต้เพิ่มเติมให้ครบทุกปราสาทเพื่อยืนยันความหลากหลายของผลลายที่พบ

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณนักโบราณคดีและเจ้าหน้าที่ผู้ดูแลปราสาททั้ง 3 แห่ง ที่ให้ความอนุเคราะห์เอื้อเฟื้อและให้ความสะดวกในการเก็บบันทึกข้อมูลเพื่อใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ที่อนุเคราะห์สถานที่ในการทำการวิจัย

เอกสารอ้างอิง

- จันทามณะวิท และคนอื่น ๆ. (2554). **นำชมอุทยานประวัติศาสตร์พิมาย**. นครราชสีมา : โจเซฟ. ศรีสุภา มีวงษ์. (2552). “ปราสาทขอม พลังศรัทธาและความเพียร,” **ชีวจิต**. 11 (264) : 84 - 86.
- Abdul, N.M. Aziz and Embong, R. (2016). **Mathematical Transformations and Songket Pattern**. European Science publishing Ltd.
- Aslaksen, H. and Poh, K.H. (2002). **Symmetry Group in Arts and Architecture**. Department of Mathematics, Faculty of Science, National University of Singapore.
- B. Grünbaum. (2006). “What Symmetry Groups Are Present in the Alhambra?,” **Notices of the AMS,** ICM. 53 (6) : 670-673
- B. Lynn Bodner. 2007. **Frieze Patterns of the Alhambra**. New Jersey : Monmouth University.
- Glenn, R. Laigo and others. (2014). “Symmetry Groups of Islamic Pattern at the Sultan Qaboos Grand Mosque. Middle East College,” **Knowledge Oasis Muscat P.B.** 79 (1) : 124
- Gallian, A. Joseph. (2012). **Contemporary Abstract Algebra 8th**. USA : Brook/Cole Cengage Learning.
- Lila Lekka and Sofia Dascalopoulos. (2018). **Motifs and Symmetry Characteristics of the Ornamentation on Traditional Greek Woven Textiles from the Area of the Aegean**. World Development.
- Maria Francisca Blanco Blanco and Lucia Nogueira de Camargo Harris (2011). **SYMMETRY GROUPS IN THE ALHAMBRA**. Brasil : Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.
- Marshall, M. Cohen and Kevin, M. Pilgrim. (2004). **Groups and Geometry**. USA : Cornell University and Indiana University.
- Stolarski Maxwell. (2010). **FRIEZE GROUPS IN $\mathbb{R}^2$** . Department of Mathematics. University of Chicago.
- Nagpaul, S.R. and Jain, S.K. (2005). **Topics in Applied Abstract Algebra**. USA : The Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics Thomson Learning.
- Norakmal Abdullah and others. (2015). **CLASSIFICATION OF FRIEZE PATTERNS IN MALAY SONGKET TEXTILE**. Malaysia.