

วงกลมแนบในและวงกลมล้อมรอบของรูปสี่เหลี่ยม The Inscribed and Circumscribed Circles of Quadrilateral

จักรกริช ถ้ำแก้ว* และ ปวีณา ถ้ำแก้ว

Jakkrit Thamkaew* and Paweena Thamkaew

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

Faculty of Science and Technology Chiang Mai Rajabhat University

Email: jakkrit_tha@cmru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยฉบับนี้ศึกษารูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมแนบใน รูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ และรูปสี่เหลี่ยมที่เป็นสี่เหลี่ยมไบเซนทริก ซึ่งได้เงื่อนไขจำเป็นดังนี้ (1) ถ้ารูปสี่เหลี่ยมมีเส้นแบ่งครึ่งมุม ทั้งสี่มุมตัดกันเพียงจุดเดียว แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นจะมีวงกลมแนบใน (2) ถ้ารูปสี่เหลี่ยมมีเส้นแบ่งครึ่ง และตั้งฉากกับด้านแต่ละด้านตัดกันเพียงจุดเดียว แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นจะมีวงกลมล้อมรอบ และพบว่า รูปสี่เหลี่ยมที่เป็นสี่เหลี่ยมไบเซนทริก ได้แก่ สี่เหลี่ยมจัตุรัส สี่เหลี่ยมรูปว่าว และสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว

คำสำคัญ: วงกลมแนบใน วงกลมล้อมรอบ สี่เหลี่ยมไบเซนทริก

ABSTRACT

In this research, we study quadrilateral concern on inscribed and circumscribed circles of quadrilateral and bicentric quadrilateral. We obtain the necessary conditions:

(1) If a quadrilateral has bisector of angles Intersecting only one point then it is quadrilateral inscribed circle.

(2) If a quadrilateral has bisector and perpendicular lines Intersecting only one point then a quadrilateral has circumcircle.

Moreover, we found that bicentric quadrilaterals are squares, kite shaped square and isosceles tangential trapezoids

Key Words: Inscribed circle, Circumcircle, Bicentric quadrilateral

บทนำ

ปี พ.ศ. 2560 ภัคคินี ชิตสกุล ได้นำเสนอบทความแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทเซวาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับเส้นขนานและสามเหลี่ยมคล้าย และนำทฤษฎีบทเซวาใช้ในการพิสูจน์ความรู้ทางเรขาคณิต เกี่ยวกับเซนทรอยด์ และออร์โทเซนเตอร์ของสามเหลี่ยม รวมถึงการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในและล้อมรอบสามเหลี่ยม และปี 2012 Luiz Gonzalez and Cosmon Pohoata ได้ทำวิจัยเรื่อง On the Intersections of the Incircle and the Cevian Circumcircle of the Incenter ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับจุดตัดของวงกลมแนบในและวงกลมล้อมรอบแบบซีเวียน จากการศึกษางานวิจัยทั้ง 2 ข้างต้น ผู้วิจัยยังพบว่าการออกแบบงานก่อสร้างต่าง ๆ ในบางครั้งมีการตกแต่งหรือจัดสวนหินในลักษณะที่เป็นวงกลมภายในเป็นรูปสี่เหลี่ยม จึงทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาความสัมพันธ์ ของวงกลมและรูปสี่เหลี่ยม โดยทำการศึกษาวงกลมแนบใน (Incircle หรือ Inscribed circle) ของรูปสี่เหลี่ยม คือ วงกลมที่สัมผัสกับด้านทั้ง 4 ด้านของรูปสี่เหลี่ยม วงกลมล้อมรอบ (Circumcircle) ของรูปสี่เหลี่ยม หมายถึง วงกลมที่มีเส้นรอบวงของวงกลมผ่านทุกจุดยอดของมุมทุกมุมของรูปสี่เหลี่ยม และสี่เหลี่ยมไบเซนทริก (Bicentric quadrilateral) หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีทั้งวงกลมแนบในและวงกลมล้อมรอบ เมื่อศึกษาจะเห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมบางรูปจะมีเพียงวงกลมแนบใน บางรูปจะมีเพียงวงกลมล้อมรอบ บางรูปสามารถมีได้ทั้งวงกลมแนบในและวงกลมล้อมรอบหรือเรียกว่ารูปนั้น เป็นสี่เหลี่ยมไบเซนทริก ทั้งนี้ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้พยายามศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นของ การมีวงกลม แนบในรูปสี่เหลี่ยม และวงกลมล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยม และศึกษารูปสี่เหลี่ยมชนิดต่าง ๆ ว่าชนิดใด มีวงกลมแนบใน ชนิดใดมีวงกลมล้อมรอบ หรือชนิดใดเป็นสี่เหลี่ยมไบเซนทริก

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

สร้างทฤษฎีที่เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมแนบใน รูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ และรูปสี่เหลี่ยมที่เป็นสี่เหลี่ยมไบเซนทริก

ขอบเขตการวิจัย

ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมแนบใน และรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ

วิธีการดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยนี้ มีขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย ดังนี้

- 1) ผู้วิจัยศึกษาการสร้างวงกลมแนบใน และวงกลมล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ ได้แก่ สี่เหลี่ยมจัตุรัส สี่เหลี่ยมผืนผ้า สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน สี่เหลี่ยมรูปว่าว สี่เหลี่ยมคางหมู และสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ผ่านโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)
- 2) ผู้วิจัยศึกษาเงื่อนไขจำเป็นที่สี่เหลี่ยมจะเกิดวงกลมแนบในได้ และเงื่อนไขจำเป็นที่สี่เหลี่ยมจะเกิดวงกลมล้อมรอบได้ โดยพิจารณาจากเส้นแบ่งครึ่งมุม เส้นแบ่งครึ่งด้าน เส้นตั้งฉาก

และสามเหลี่ยมสมภาค เพื่อหารูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างวงกลมแนบใน วงกลมล้อมรอบของรูปสี่เหลี่ยม จากนั้นได้หาแนวทางเพื่อพิสูจน์โดยอาศัยการให้เหตุผลตามหลักทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยได้ใช้ความรู้พื้นฐานจากเอกสารอ้างอิงลำดับที่ 1 และ 3 ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วเส้นตรงสองเส้นนั้นตัดกันเพียงจุดเดียว

ทฤษฎีบท 2 เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะแบ่งครึ่งมุมของมุมที่เกิดเส้นทแยงมุมนั้น

ทฤษฎีบท 3 เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนจะแบ่งครึ่งมุมของมุมที่เกิดเส้นทแยงมุมนั้น

ทฤษฎีบท 4 ถ้าจุด A และจุด B ต่างอยู่ห่างจากจุด P และจุด Q เท่ากันตามลำดับ แล้วทุก ๆ จุดที่อยู่บนเส้นตรง AB จะอยู่ห่างจากจุด P และจุด Q เท่ากัน

ทฤษฎีบท 5 ถ้ามุมคู่เชิงเส้นมีขนาดเท่ากัน แล้วมุมทั้งสองเป็นมุมฉาก

ทฤษฎีบท 6 มุมที่ฐานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วย่อมมีขนาดเท่ากัน

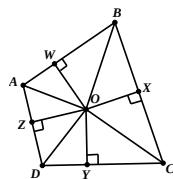
ผลการวิจัย

การนำเสนอผลการวิจัย ผู้วิจัยขอแบ่งเนื้อหาตามการศึกษาเป็น 3 หัวข้อ ได้แก่ รูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมแนบใน รูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ และการสร้าง รายละเอียดดังนี้

1. รูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมแนบใน

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมมีเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสี่มุมตัดกันเพียงจุดเดียว แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นจะมีวงกลมแนบใน

การพิสูจน์ กำหนด $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมใด ๆ โดยให้เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสี่มุมตัดกันเพียงจุดเดียวที่จุด O สร้างเส้นตั้งฉากจากจุด O ไปยังด้านแต่ละด้านของ $\square ABCD$ ดังนี้ $\overline{OW} \perp \overline{AB}$, $\overline{OX} \perp \overline{BC}$, $\overline{OY} \perp \overline{CD}$ และ $\overline{OZ} \perp \overline{AD}$ ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 $\square ABCD$ มีเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสี่มุมตัดกันที่จุด O

เนื่องจาก $\square ABCD$ มีเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสี่มุมตัดกันที่จุด O จะได้ว่า

$$m\angle OAW = m\angle OAZ, m\angle OBW = m\angle OBX \text{ และ } m\angle OCX = m\angle OCY$$

จาก $\overline{OW} \perp \overline{AB}$ และ $\overline{OZ} \perp \overline{AD}$ จึงได้ว่า $m\angle OWA = m\angle OZA$

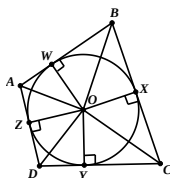
จาก $\overline{OW} \perp \overline{AB}$ และ $\overline{OX} \perp \overline{BC}$ จึงได้ว่า $m\angle OWB = m\angle OXB$

จาก $\overline{OX} \perp \overline{BC}$ และ $\overline{OY} \perp \overline{CD}$ จึงได้ว่า $m\angle OXC = m\angle OYC$

ซึ่ง $OA = OA$, $OB = OB$ และ $OC = OC$

ดังนั้นโดยความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ม. จะได้ $\triangle AOW \cong \triangle AOZ$, $\triangle BOW \cong \triangle BOX$ และ $\triangle COX \cong \triangle COY$ ทำให้ได้ว่า $OW = OX = OY = OZ$

แสดงว่าจุด W, X, Y และ Z จะเป็นจุดที่อยู่บนวงกลม O ที่มีรัศมีเท่ากับ OW และจุด W, X, Y และ Z เป็นจุดที่อยู่บนด้านแต่ละด้านของ $\square ABCD$ ดังนั้นวงกลม O เป็นวงกลมที่แนบใน $\square ABCD$ ดังภาพประกอบ 2



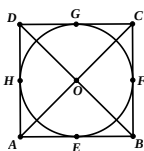
ภาพประกอบ 2 วงกลม O แนบใน $\square ABCD$



ทฤษฎีบท 1.2 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะมีวงกลมแนบในเสมอ

การพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 2 จะได้ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสองเส้นจะแบ่งครึ่งมุมและตัดกันเพียงจุดเดียว

และโดยทฤษฎีบท 1.1 จึงได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะมีวงกลมแนบใน ดังภาพประกอบ 3



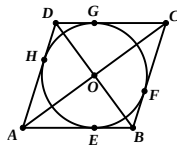
ภาพประกอบ 3 สี่เหลี่ยมจัตุรัสมีวงกลมแนบใน



ทฤษฎีบท 1.3 รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนจะมีวงกลมแนบในเสมอ

การพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 3 จะได้ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนทั้งสองเส้นจะแบ่งครึ่งมุมและตัดกันเพียงจุดเดียว

โดยทฤษฎีบท 1.1 จึงได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนจะมีวงกลมแนบใน ดังภาพประกอบ 4



ภาพประกอบ 4 สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีวงกลมแนบใน

□

ทฤษฎีบท 1.4 รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวจะมีวงกลมแนบในเสมอ

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\square MNKL$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว โดยที่ $ML = KL$ และ $MN = KN$
สร้าง $\overline{KS}$ ให้แบ่งครึ่ง $\angle LKN$ โดยที่จุด S อยู่บน $\overline{LN}$ (*)

ลาก $\overline{MS}$ (จะแสดงว่า $\overline{MS}$ แบ่งครึ่ง $\angle LMN$)

จะเห็นว่า $ML = KL$, $LS = LS$ และโดยทฤษฎีบท 4 จะได้ $MS = KS$

จะเห็นว่า $MN = KN$, $SN = SN$ และโดยทฤษฎีบท 4 จะได้ $MS = KS$

จากความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด. $\triangle KLS \cong \triangle MLS$ และ $\triangle KNS \cong \triangle MNS$

จึงได้ว่า $m\angle SKL = m\angle SML$ และ $m\angle SKN = m\angle SMN$

เนื่องจาก $\overline{KS}$ แบ่งครึ่ง $\angle LKN$ จะได้ $m\angle SKL = m\angle SKN$

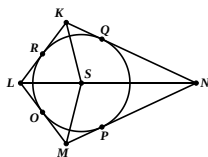
จึงทำให้ได้ว่า $m\angle SML = m\angle SMN$ ดังนั้น $\overline{MS}$ แบ่งครึ่ง $\angle LMN$ (**)

ต่อไปพิจารณา $\triangle LKN$ และ $\triangle LMN$ จะเห็นว่า $ML = KL$ และ $MN = KN$ และ $LN = LN$ จาก
ความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด. $\triangle LKN \cong \triangle LMN$

จึงได้ว่า $m\angle KLN = m\angle MLN$ และ $m\angle KNL = m\angle MNL$

ดังนั้น $\overline{LN}$ แบ่งครึ่ง $\angle KLN$ และ $\angle KNL$ (***)

จาก (*) (**) และ (***) โดยทฤษฎีบท 1.1 จึงได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวจะมีวงกลมแนบใน
ดังภาพประกอบ 5



ภาพประกอบ 5 สี่เหลี่ยมรูปว่าวมีวงกลมแนบใน

□

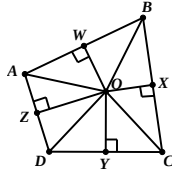
2. รูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมมีเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านแต่ละด้านตัดกันเพียงจุดเดียว
แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นจะมีวงกลมล้อมรอบ

การพิสูจน์ กำหนด $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมใด ๆ โดยมีเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านแต่ละ
ด้านตัดกันเพียงจุดเดียวที่จุด O

ลากเส้นจากจุด O ให้แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านแต่ละด้านของ $\square ABCD$ โดยกำหนดให้ $\overline{OW} \perp \overline{AB}$, $\overline{OX} \perp \overline{BC}$, $\overline{OY} \perp \overline{CD}$ และ $\overline{OZ} \perp \overline{AD}$

และ $AW = BW$, $BX = CX$, $CY = DY$, $AZ = DZ$ ดังภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 6 $\square ABCD$ ที่มีเส้นจากจุด O แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านแต่ละด้าน

จาก $AW = BW$ และ $m\angle AWO = m\angle BWO$

จาก $BX = CX$ และ $m\angle BXO = m\angle CXO$

จาก $CY = DY$ และ $m\angle CWO = m\angle DWO$

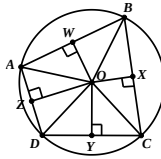
และจาก $OW = OW$, $OX = OX$ และ $OY = OY$

ดังนั้นโดยความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด. จะได้ว่า $\triangle AOW \cong \triangle BOW$, $\triangle BXO \cong \triangle CXO$ และ

$\triangle COY \cong \triangle DOY$ ทำให้ได้ว่า $OA = OB = OC = OD$

ซึ่งจุด A, B, C และ D จะเป็นจุดที่อยู่บนวงกลม O ที่มีรัศมีเท่ากับ OA

และจากจุด A, B, C และ D เป็นจุดที่อยู่บนด้านแต่ละด้านของ $\square ABCD$ ดังนั้นวงกลม O เป็นวงกลมที่ล้อมรอบ $\square ABCD$ ดังภาพประกอบ 7



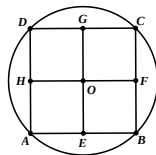
ภาพประกอบ 7 วงกลม O ล้อมรอบ $\square ABCD$



ทฤษฎีบท 2.2 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะมีวงกลมล้อมรอบเสมอ

การพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 5 จะได้ว่าเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านแต่ละด้านจะตัดกันเพียงจุดเดียว

และโดยทฤษฎีบท 2.1 จึงได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะมีวงกลมล้อมรอบ ดังภาพประกอบ 8



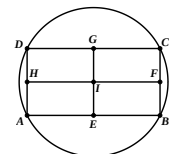
ภาพประกอบ 8 สี่เหลี่ยมจัตุรัสมีวงกลมล้อมรอบ



ทฤษฎีบท 2.3 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีวงกลมล้อมรอบเสมอ

การพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 5 จะได้ว่าเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านแต่ละด้าน จะตัดกันเพียงจุดเดียว

และโดยทฤษฎีบท 2.1 จึงได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีวงกลมล้อมรอบ ดังภาพประกอบ 9



ภาพประกอบ 9 สี่เหลี่ยมผืนผ้ามีวงกลมล้อมรอบ



ทฤษฎีบท 2.4 รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วจะมีวงกลมล้อมรอบ

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว โดยที่ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ และ $AD = BC$ และให้จุด H และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{DC}$ ตามลำดับ

โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ $DH = CH$

พิจารณา $\triangle DFH$ และ $\triangle CFH$ จะเห็นว่า $DF = CF$, $FH = FH$

จากความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด. จะได้ $\triangle DFH \cong \triangle CFH$ จึงได้ว่า $m\angle DFH = m\angle CFH$

โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า $\angle DFH$ และ $\angle CFH$ เป็นมุมฉาก(*)

ต่อไปให้จุด G และจุด E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ

ทำให้ได้ว่า $AG = DG = BE = CE$

ลาก $\overline{GF}$, $\overline{GH}$, $\overline{EF}$ และ $\overline{EH}$

พิจารณา $\triangle GDF$ และ $\triangle ECF$ จะเห็นว่า $GD = EC$, $DF = CF$

และโดยทฤษฎีบท 6 จะได้ $m\angle GDF = m\angle ECF$

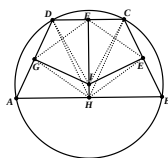
จากความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด. $\triangle GDF \cong \triangle ECF$ จึงได้ว่า $GF = EF$

และพิจารณา $\triangle GAH$ และ $\triangle EBH$ จะเห็นว่า $AG = BE$, $AH = BH$

และโดยทฤษฎีบท 6 จะได้ $m\angle GAH = m\angle EBH$

จากความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด. $\triangle GAH \cong \triangle EBH$ จึงได้ว่า $GH = EH$

สร้าง $\overline{GI}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ โดยที่จุด I อยู่บน $\overline{FH}$ จากนั้นลาก $\overline{EI}$
 จาก $GF = EF$ และ $GH = EH$ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ $GI = EI$
 พิจารณา $\triangle DGI$ และ $\triangle CEI$ จะเห็นว่า $GD = EC$ และ $GI = EI$
 และจาก $DH = CH$ และ $DF = CF$ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ $DI = CI$
 จากความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด. $\triangle DGI \cong \triangle CEI$ จึงได้ว่า $m\angle DGI = m\angle CEI$
 เนื่องจาก $\overline{GI}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ แสดงว่า $\angle DGI$ และ $\angle CEI$ เป็นมุมฉาก.....(**)
 จาก (*) และ (**) โดยทฤษฎีบท 2.1 จึงได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วมีวงกลมล้อมรอบ
 ดังภาพประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 สี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วมีวงกลมล้อมรอบ

□

สำหรับรูปสี่เหลี่ยมที่มีทั้งวงกลมแนบในและวงกลมล้อมรอบ จะเรียกว่า สี่เหลี่ยมไบเซนทริก
 จากหัวข้อข้างต้นจะทำให้ได้บทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 2.5 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นสี่เหลี่ยมไบเซนทริก

การพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1.2 และทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นสี่เหลี่ยมไบเซนทริก

□

บทแทรก 2.6 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปาวรมีวงกลมล้อมรอบ แล้วสี่เหลี่ยมรูปาววนั้นเป็นสี่เหลี่ยมไบเซนทริก

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปาววที่มีวงกลมล้อมรอบ

โดยทฤษฎีบท 1.4 จะได้ว่า รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ จะมีวงกลมแนบใน

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมรูปาววเป็นสี่เหลี่ยมไบเซนทริก

□

บทแทรก 2.8 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วมีวงกลมแนบใน แล้วรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วเป็นสี่เหลี่ยมไบเซนทริก

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วที่มีวงกลมแนบใน

โดยทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ จะมีวงกลมล้อมรอบ

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วเป็นสี่เหลี่ยมไบเซนทริก

□

3. การสร้าง

โดยปกติสี่เหลี่ยมใด ๆ ไม่จำเป็นต้องมีวงกลมแนบใน หรือวงกลมล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยม หัวข้อนี้ ผู้วิจัยจะกล่าวถึงขั้นตอนการสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมแนบในและวงกลมล้อมรอบ รายละเอียดดังนี้

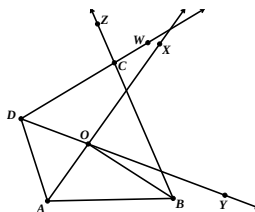
3.1 ขั้นตอนการสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมแนบใน

การสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมแนบใน ผู้วิจัยขอแบ่งเป็น 2 ตอน โดยตอนที่ 1 เป็นการอธิบาย ขั้นตอนการสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมแนบใน ส่วนตอนที่ 2 เป็นการพิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้น นั้นมีวงกลมแนบในอยู่จริง

ตอนที่ 1 วิธีการสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมแนบใน

1. กำหนด $\overline{AB}$ ให้มีความยาวพอสมควร
2. ลาก $\overline{AD}$ ให้มีความยาวพอสมควร
3. สร้าง $\overline{AX}$ ให้แบ่งครึ่ง $\angle BAD$
4. สร้าง $\overline{DY}$ ตัด $\overline{AX}$ ที่จุด O
5. สร้าง $\overline{DW}$ ที่ทำให้ $m\angle YDW = m\angle ADY$
6. ลาก $\overline{BO}$
7. สร้าง $\overline{BZ}$ ตัด $\overline{DW}$ โดยที่ $m\angle OBZ = m\angle ABO$ ที่จุด C

จะได้ $\square ABCD$ ดังภาพประกอบ 11



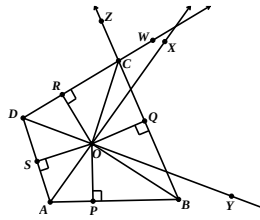
ภาพประกอบ 11 การสร้าง $\square ABCD$ ให้มีวงกลมแนบใน

ตอนที่ 2 การแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยมที่สร้างขึ้นมีวงกลมแนบใน

พิจารณา $\square ABCD$ จากภาพประกอบ 11 ที่ได้จากการสร้างในตอนที่ 1

ลาก $\overline{OC}$

สร้าง $\overline{OP}, \overline{OQ}, \overline{OR}$ และ $\overline{OS}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ และ $\overline{AD}$ ที่จุด P, Q, R และ S ตามลำดับ ดังภาพประกอบ 12



ภาพประกอบ 12 $\square ABCD$ ที่ด้านแต่ละด้านมีเส้นตั้งฉากกับจุด O

จะเห็นว่า $OD = OD$, $m\angle ODR = m\angle ODS$ และ $m\angle ORD = m\angle OSD$

จะเห็นว่า $OA = OA$, $m\angle OAS = m\angle OAP$ และ $m\angle OSA = m\angle OPA$

จะเห็นว่า $OB = OB$, $m\angle OBP = m\angle OBQ$ และ $m\angle OPB = m\angle OQB$

จากความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ม. จะได้ว่า $\triangle ODR \cong \triangle ODS$, $\triangle OAS \cong \triangle OAP$, $\triangle OBP \cong \triangle OQB$ จึงได้ว่า

$OR = OS$, $OS = OP$ และ $OP = OQ$

ต่อไปพิจารณา $\triangle OCQ$ และ $\triangle OCR$ เนื่องจาก $OR = OQ$, $OC = OC$ และ $\angle ORC, \angle OQC$

เป็นมุมฉาก ดังนั้นโดยความสัมพันธ์แบบ ด.ด.จ. $\triangle OCQ \cong \triangle OCR$

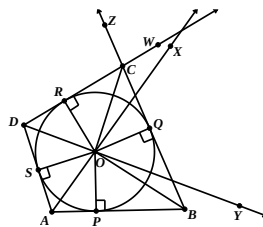
จึงได้ว่า $m\angle OCR = m\angle OCQ$ นั่นคือ $\overline{OC}$ แบ่งครึ่ง $\angle BCD$

จากการสร้าง $\overline{DW}$ ที่ทำให้ $m\angle YDW = m\angle ADY$ แสดงว่า $\overline{DY}$ แบ่งครึ่ง $\angle ADC$

จากการสร้าง $\overline{BZ}$ ที่ทำให้ $m\angle OBZ = m\angle ABO$ แสดงว่า $\overline{BO}$ แบ่งครึ่ง $\angle ABC$

และ $\overline{AX}$ แบ่งครึ่ง $\angle BAD$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จึงได้ว่าวงกลม O เป็นวงกลมที่แนบใน $\square ABCD$ ดังภาพประกอบ 13



ภาพประกอบ 13 วงกลม O แนบใน $\square ABCD$

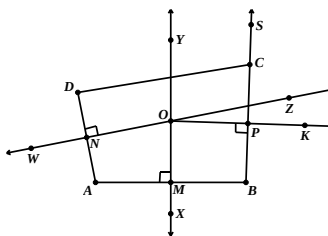


3.2 ขั้นตอนการสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ

การสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ ผู้วิจัยขอแบ่งเป็น 2 ตอน โดยตอนที่ 1 เป็นการอธิบายขั้นตอนการสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ ส่วนตอนที่ 2 เป็นการพิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นนั้นมีวงกลมล้อมรอบอยู่จริง

ตอนที่ 1 วิธีการสร้างรูปสี่เหลี่ยมให้มีวงกลมล้อมรอบ

1. กำหนด $\overline{AB}$ ให้มีความยาวพอสมควร
 2. สร้างจุดกึ่งกลาง M ของ $\overline{AB}$
 3. ที่จุด M สร้าง $\overline{XY}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$
 4. ลาก $\overline{AD}$ ให้มีความยาวพอสมควร และสร้างจุดกึ่งกลาง N ของ $\overline{AD}$
 5. ที่จุด N สร้าง $\overline{WZ}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{AD}$
 6. จุดตัดที่เกิดจาก $\overline{XY}$ และ $\overline{WZ}$ ให้จุดตัดคือ จุด O
 7. ลาก $\overline{BS}$ ให้มีความยาวพอสมควร
 8. สร้าง $\overline{OK}$ ให้ตัดและตั้งฉากกับ $\overline{BS}$ และให้จุดตัดคือ จุด P
 9. สร้างจุด C บน $\overline{BS}$ โดยที่ $BP = PC$
 10. ลาก $\overline{CD}$
- จะได้ $\square ABCD$ ดังภาพประกอบ 14



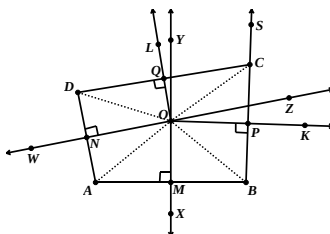
ภาพประกอบ 14 $\square ABCD$ มีเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับจุด O

ตอนที่ 2 การแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยมที่สร้างขึ้นมีวงกลมล้อมรอบ

พิจารณา $\square ABCD$ จากภาพประกอบ 14

ลาก $\overline{OL}$ ให้ตัดและตั้งฉากกับ $\overline{CD}$ และให้จุดตัดคือ จุด Q

จากนั้นลาก $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ และ $\overline{OD}$ ดังภาพประกอบ 15



ภาพประกอบ 15 $\square ABCD$ ที่มีเส้นจากจุดยอดมุมไปยังจุด O

จาก N และ M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AD}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ จะได้ $DN = AN$ และ $AM = BM$
จาก $\overline{WZ}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AD}$ ที่จุด N และ $\overline{XY}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด M ตามลำดับ จะได้ว่า

$$m\angle OND = m\angle ONA \text{ และ } m\angle OMA = m\angle OMB \text{ ซึ่ง } ON = ON \text{ และ } OM = OM$$

ดังนั้นโดยความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด. จะได้ $\triangle OND \cong \triangle ONA$ และ $\triangle OMA \cong \triangle OMB$ จึงได้ว่า

$$OD = OA \text{ และ } OA = OB$$

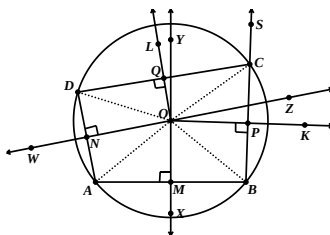
พิจารณา $\triangle OPB$ และ $\triangle OPC$ จะเห็นว่า $BP = PC$ และ $OP = OP$

และจาก $\overline{OK}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด P จะได้ว่า $m\angle OPB = m\angle OPC$

ดังนั้นโดยความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด. $\triangle OPB \cong \triangle OPC$ จึงได้ว่า $OB = OC$

ทำให้ได้ว่า $OA = OB = OC = OD$

ดังนั้น จุด A, B, C, D อยู่บนวงกลม O ทั้งหมด จึงได้ว่าวงกลม O เป็นวงกลมที่ล้อมรอบ $\square ABCD$
ดังภาพประกอบ 16



ภาพประกอบ 16 วงกลม O ล้อมรอบ $\square ABCD$



อภิปรายผลการวิจัย

สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาวงกลมแนบในและวงกลมล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยม โดยได้ทำการวิเคราะห์สิ่งสำคัญที่จะทำให้รูปสี่เหลี่ยมเกิดวงกลมแนบในและวงกลมล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งผู้วิจัยได้สังเกตลักษณะของมุม ด้าน จุดกึ่งกลางด้าน เส้นแบ่งครึ่งมุม เส้นแบ่งครึ่งด้าน เส้นตั้งฉาก เป็นต้น จึงทำให้ได้ข้อสรุปว่ารูปสี่เหลี่ยมจะมีวงกลมแนบในได้ ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุมทุกมุมตัดกันเพียงจุดเดียว และรูปสี่เหลี่ยมเกิดวงกลมล้อมรอบได้ ถ้าเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านแต่ละด้านตัดกันเพียงจุดเดียว ซึ่งข้อสรุปข้างต้นสามารถนำไปใช้ตรวจสอบได้ว่าสี่เหลี่ยมใดจะมีวงกลมแนบในและวงกลมล้อมรอบได้

เอกสารอ้างอิง

- จักรกริช ถ้ำแก้ว. (2563). *เรขาคณิตเบื้องต้น*. เชียงใหม่ : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่.
- ภักคินี ชิตสกุล. (2560). ทฤษฎีบทเชวา. *วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์*, 62(693).
- Hirsch, R., Roberth, M.A., Coblentz, D.O., Samide, A.J. and Schoen, H.L. (1979). *Geometry*. Scott : Foresman and Company.
- Gonzalez, L. and Pohoata, C. (2012). On the Intersections of the Incircle and the Cevian Circumcircle of the Incenter. *Forum Geometricorum*, 12, 141-148.