ความสมมาตรของลวดลายจำหลักที่ปรากฏบนปราสาทหินในอีสานใต้ ประเทศไทย
Symmetry in the Carving Patterns of Sandstone Sanctuaries in Southern Isaan, Thailand

สมภพ กาญจนะ ปานไพลิน ทับทิม เจนจิราพร นามวงศ์ โชติกา นามพูน
ธนาวุฒิ จรดรัมย์ และสำคัญ ฮ่อบรรทัด*
Somphop Kanchana, Panpailin Tabtim, Janejiraporn Namwong,
Chotika Nampoon, Thanawut Jarodrum and Samkhan Hobanthad*
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
Mathematics Program, Faculty of Science, Buriram Rajabhat University
*Email: samkan.hb@bru.ac.th

Received : April 9, 2023
Revised : November 6, 2023
Accepted : December 8, 2023

บทคัดย่อ

งานวิจัยชิ้นนี้มีวัตถุประสงค์หลัก คือ ศึกษา และจัดจำแนกความสมมาตรของลวดลายจำหลักของปราสาทหินในจังหวัดกลุ่มอีสานใต้ ประเทศไทยซึ่งมีจำนวนทั้งสิ้น 82 ปราสาท ทำการเลือกตัวอย่างกลุ่มเป้าหมายแบบเจาะจงจำนวน 7 ปราสาท ผลการศึกษาพบว่า ประเภทสมมาตรที่พบ ได้แก่ ฟรีซกรุปประเภท P2mm, P111, P1m1, P11m และ กรุปการหมุนรูปประเภท D_8, D_4 แต่ไม่พบลวดลายวอลเปเปอร์

คำสำคัญ: ฟรีซกรุป วอลเปเปอร์กรุป ลายจำหลัก ปราสาทหิน

ABSTRACT

The main purpose of this research was to study and classify the symmetry of carving patterns in sandstone sanctuaries in southern Isaan, Thailand. A total of 82 temples were considered, and a specific group of targets comprising 7 temples was

selected. The results showed that the symmetrical types found in carving patterns include frieze patterns P2mm, P111, P1m1, P11m, and dihedral patterns D8 and D4. However, wallpaper patterns were not identified.

Keywords: Frieze groups, Wallpaper groups, Carving pattern, Stone castle

บทนำ

ลวดลายเป็นศิลปะที่อยู่คู่กับมนุษย์มาอย่างยาวนาน เราพบลวดลายอยู่รอบตัว ทั้งในธรรมชาติและลวดลายที่ถูกสร้างขึ้น รวมถึงลวดลายทางคณิตศาสตร์ นักคณิตศาสตร์หลายคนให้ความสนใจลวดลายที่มีรูปแบบการซ้ำ และพยายามที่จะจัดหมวดหมู่โดยใช้พื้นฐานการแปลงเรขาคณิต ทั้งการหมุน การสะท้อน การเลื่อนขนาน และการสะท้อนแบบเลื่อน ผนวกกับความรู้ทฤษฎีกรุปพิสูจน์ได้ว่ารูปแบบความสมมาตรของลวดลายวอลเปเปอร์กรุปจะมีได้เพียง 17 รูปแบบ นอกจากนี้รูปแบบความสมมาตรของลวดลายฟรีซกรุปมีเพียง 7 รูปแบบ (Fedorov E. S., 1891, Polya G., 1924) ต่อมามีนักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจสำรวจภูมิปัญญาโบราณในการสร้างสรรค์ลวดลายที่ประดับบนสถาปัตยกรรมที่มีชื่อเสียงและมีประวัติที่ยาวนานว่าครอบคลุมความสมมาตรทุกประเภทหรือไม่ (Lekka L. and Dascalopoulos S., 2008, Reinhardt P. A. and Welter L., 1999, Bodner B. L., 2013, Glenn R. L., et al 2014, Malouise A. N. L. P. and Analyn V. S. A., 2016, Perez-Gomez R., 1987) บนสถาปัตยกรรมแต่ละสถานที่แต่ละลวดลายที่ทำการศึกษาพบประเภทสมมาตรที่แตกต่างกันไป สำหรับประเทศไทย กลุ่มจังหวัดอีสานใต้นับว่าเป็นพื้นที่มีโบราณสถานจำนวนมาก กระจายตัวอยู่ทั่วทั้งจังหวัด แต่ที่ยังคงมีสภาพสมบูรณ์มีเพียงไม่กี่ที่เท่านั้น ปราสาทเหล่านี้นอกจากมีสถาปัตยกรรมที่งดงามแล้ว บนปราสาททั้งสองยังถูกตกแต่งด้วยลวดลายจำหลักจำนวนมาก มีความสมมาตรของลวดลายที่หลากหลาย จึงเป็นที่มาของคำถาม ว่าลวดลายที่ปรากฏครอบคลุมความสมมาตรทุกประเภทหรือไม่ ดังนั้น บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อคัดแยกลวดลายจำหลักบนพื้นฐานทฤษฎีทางคณิตศาสตร์เชิงเรขาคณิต เพื่อให้เห็นอัจฉริยะภาพทางคณิตศาสตร์ของนักออกแบบลวดลายสมัยโบราณของไทย ว่าไม่แพ้ชาติใดในโลก รวมถึงเยาวชนในชุมชนได้ภาคภูมิใจและเห็นคุณค่าของศิลปะพื้นถิ่น ว่าเหมาะแก่การอนุรักษ์และหวงแหนเพียงใด

ฟรีซกรุป (frieze group)

กำหนดให้ G เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $*: G \times G \to G$ เป็นการดำเนินการทวิภาค จะกล่าวว่า $(G,*)$ เป็นกรุป ก็ต่อเมื่อ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ สมบัติการมีเอกลักษณ์ และ สมบัติการมีตัวผกผัน ถ้า B เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ G และ $(B,*)$ เป็นกรุป แล้ว จะเรียก B เป็นกรุปย่อยของ G เมื่อกำหนดให้ X เป็นเซตของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงทั้งหมดที่ส่งจากระนาบ $\mathbb{R}^2$ ไปยัง $\mathbb{R}^2$ ถ้า $\circ$ เป็นการดำเนินการคอมโพสิท แล้ว $(X,\circ)$ เป็นกรุป (Nagpaul S. R. and Jain S. K., 2005) เราจะเริ่มต้นนิยาม ฟรีซกรุป (frieze group) ดังนี้

บทนิยาม 1. จะเรียก f ว่าเป็นไอโซเมทรี (isometry) ถ้า $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นฟังก์ชันรักษาระยะ (distance-preserving function) นั่นคือ $\|f(a)-f(b)\| = \|a-b\|$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}^2$ และแทนสัญลักษณ์ของเซตของไอโซเมทรีทั้งหมดด้วย $Isom(\mathbb{R}^2)$

Cohen M. M. and Pilgrim K. M. (2004) ได้แสดงว่า $Isom(\mathbb{R}^2)$ เป็นกรุปย่อยของ X นอกจากนี้ยังแสดงได้ว่า มีไอโซเมทรีพื้นฐานเพียงสามชนิด ได้แก่ การเลื่อนขนาน (translations (τ)) การหมุน (rotations (r)) และ การสะท้อน (reflections (m)) สำหรับการสะท้อนแบบเลื่อน (glide-reflections (g)) เป็นไอโซเมทรีที่ประกอบด้วย การเลื่อนขนาน และการสะท้อน

บทนิยาม 2. ให้ P เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ P เป็นเซตของจุดบนระนาบ $\mathbb{R}^2$ นิยาม $Sym(P) = \{\alpha \in Isom(\mathbb{R}^2) \mid \alpha(P) = P\}$ นั่นคือ $\alpha(p) \in P$ สำหรับทุก $p \in P$

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ $P = \{(-1,-1),(-1,1),(1,1),(1,-1)\}$ นิยาม $r_{\frac{\pi}{2}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ โดย $r_{\frac{\pi}{2}}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ สำหรับทุก $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ให้ $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \left\| r_{\frac{\pi}{2}}(x_1,y_1) - r_{\frac{\pi}{2}}(x_2,y_2) \right\| &= \|(-y_1,x_1)-(-y_2,x_2)\| \\ &= \sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_1-x_2)^2} \\ &= \|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| \end{aligned}$$

ดังนั้น $r_{\frac{\pi}{2}} \in Isom(\mathbb{R}^2)$ ยิ่งไปกว่านั้น $r_{\frac{\pi}{2}}(x,y) \in P$ สำหรับทุก $(x,y) \in P$ นั่นคือ $r_{\frac{\pi}{2}} \in Sym(P)$.
Cohen M. M. and Pilgrim K. M. (2004) ได้แสดงว่า $Sym(P)$ เป็นกรุปย่อยของ $Isom(\mathbb{R}^2)$

บทนิยาม 4. ให้ O_2 เป็นเซตของเมทริกทั้งหมดที่นิยามดังนี้

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{หรือ} \quad M_{\frac{\theta}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

โดยที่ R_θ เป็นฟังก์ชันของการหมุนตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมขนาด θ รอบจุดกำเนิด และ $M_{\frac{\theta}{2}}$ เป็นฟังก์ชันของการสะท้อนบนเส้นตรงที่ลากผ่านจุดกำเนิด โดยที่เส้นตรงทำมุมขนาด $\frac{\theta}{2}$ กับแกน x
จากตัวอย่าง 3 จะได้ว่า $r_{\frac{\pi}{2}} \in O_2$

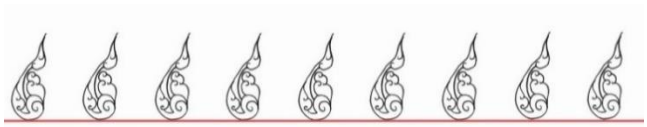
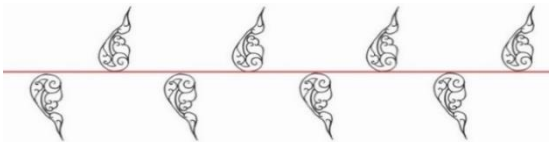
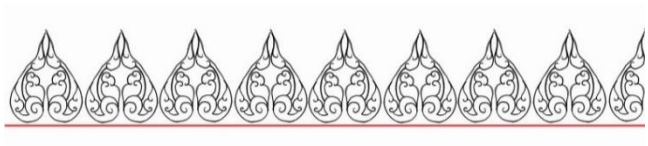
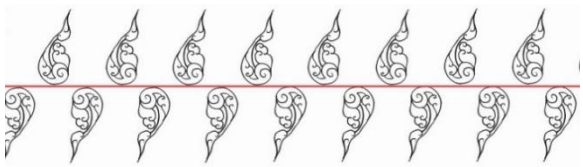
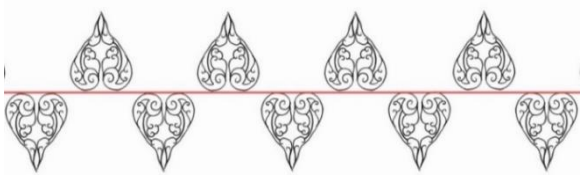
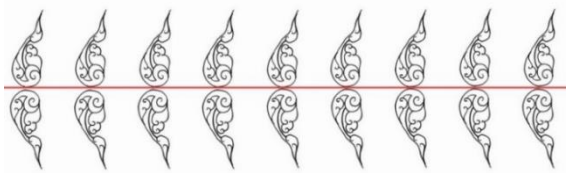
คุณสมบัติ 5. ให้ $A \in O_2$, $z, b \in \mathbb{R}^2$ และ $\pi : Isom(\mathbb{R}^2) \to O_2$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $\pi(f) = A$ ถ้า $f(z) = Az + b$ แล้ว π เป็นฟังก์ชันทั่วถึงที่ส่งจาก $Isom(\mathbb{R}^2)$ ไป O_2 และ π เป็นโฮโมมอร์ฟิซึม

Cohen M. M. and Pilgrim K. M. (2004) ได้แสดงว่า ถ้า H เป็นกรุปย่อยของ $Isom(\mathbb{R}^2)$, $T_H = T \cap H$ โดยที่ T เป็นเซตของการเลื่อนขนานทั้งหมดใน $Isom(\mathbb{R}^2)$, $\pi : Isom(\mathbb{R}^2) \to O_2$ เป็นฟังก์ชันที่ลดขนาดโดเมนลงเป็น H จะได้ว่า เคอร์เนล (kernel) ของ $\pi : H \to O_2$ คือ T_H จากทฤษฎีบทหลักมูลไอโซมอร์ฟิซึม (First Isomorphism Theorem) จะได้ว่า $\pi(H) \cong H/T_H$ และเรียก $\pi(H)$ ว่า พอยท์กรุป (point group) ของ H

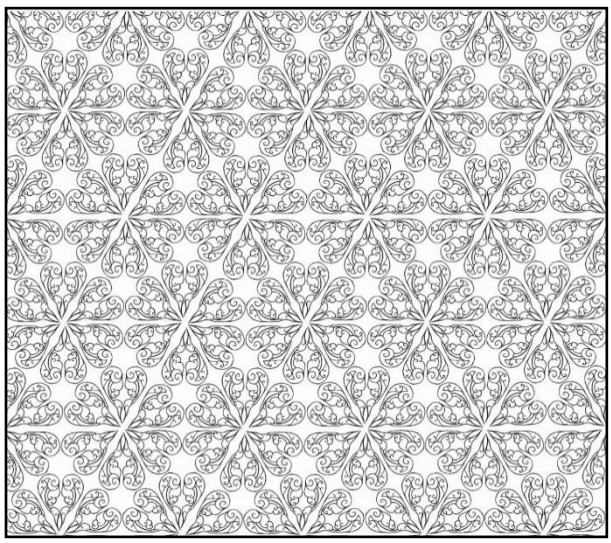
บทนิยาม 6 จะกล่าวว่า กรุปย่อย H ของ $Isom(\mathbb{R}^2)$ เป็น ฟรีซกรุป (**frieze group**) ถ้ากรุปย่อย T_H ของ H เป็นกรุปวัฏจักรอนันต์ที่ก่อกำเนิดโดยเวกเตอร์ใด ๆ กล่าวคือ $T_H = <\tau_a>$ และ พอยท์กรุป $\pi(H)$ เป็นกรุปจำกัด

ทฤษฎีบท 7 (Fedorov E. S., 1891, Polya G., 1924) ฟรีซกรุป (frieze group) มี 7 คลาสสมมูล สัญลักษณ์ของฟรีซกรุป (frieze group) ตามแบบ IUCr (International Union of Crystallography) มีทั้งหมด 7 ชนิด ดังนี้

ตารางที่ 1 สัญลักษณ์ตามระบบ IUCr และตัวอย่างลายบนระนาบ

สัญลักษณ์ตามระบบ IUCr	ตัวอย่างลายบนระนาบ
p111	
p11g	
p1m1	
p211	
p2mg	
p11m	
p2mm	

บทนิยาม 8 จะกล่าวว่า กรุปย่อย H ของ $Isom(\mathbb{R}^2)$ เป็น วอลเปเปอร์กรุป (**wallpaper group**) ถ้ากรุปย่อย T_H ของ H เป็นกรุปวัฏจักรอนันต์ที่ก่อกำเนิดโดยสองเวกเตอร์เชิงเส้นใด ๆ กล่าวคือ $T_H =< \tau_a, \tau_b >$ โดยที่ a และ b เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน และ พอยท์กรุป $\pi(H)$ เป็นกรุปจำกัด

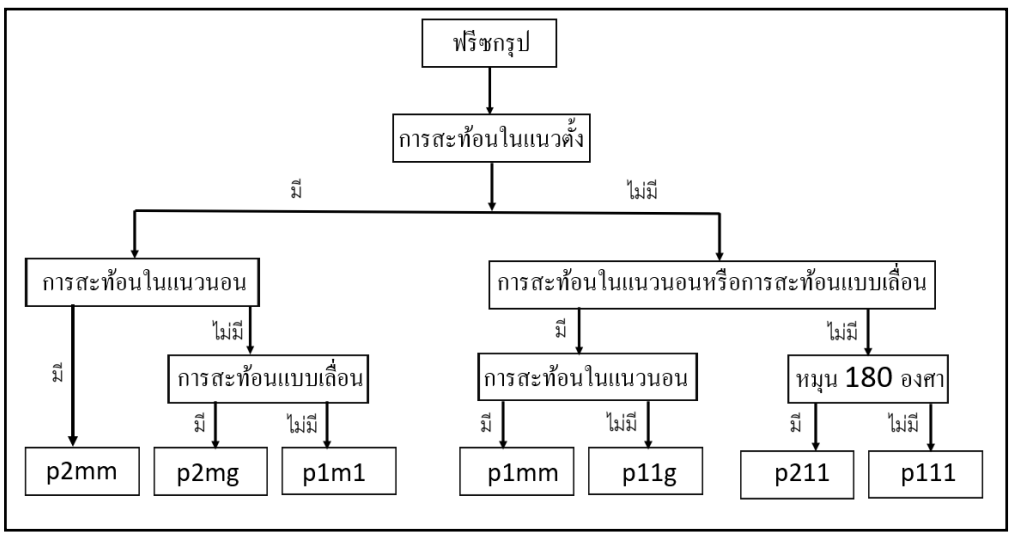


ภาพประกอบ 1 ตัวอย่างลวดลายวอลเปเปอร์กรุป

วิธีดำเนินงานวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยสำรวจ เก็บข้อมูลรูปภาพ และวิเคราะห์รูปภาพโดยมีประชากร คือ จำนวนปราสาททั้งหมด ปราสาท แบ่งเป็น จังหวัดนครราชสีมา 4 ปราสาท จังหวัดบุรีรัมย์ 30 ปราสาท จังหวัดสุรินทร์ 34 ปราสาท จังหวัดศรีสะเกษ 11 ปราสาท จังหวัดอุบลราชธานี 3 ปราสาท รวมประชากรทั้งสิ้น 82 ปราสาท เก็บข้อมูลลวดลายทั้งหมดในปราสาทที่เลือกสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง ดังนี้ ลวดลายจำหลักของปราสาทหินพนมรุ้ง ปราสาทเมืองต่ำ จังหวัดบุรีรัมย์ ปราสาทหินพิมาย จังหวัดนครราชสีมา ปราสาทบ้านพลวง ปราสาทตาเมือนธม และปราสาทศีขรภูมิ จังหวัดสุรินทร์ ปราสาทสระกำแพงใหญ่ จังหวัดศรีสะเกษ รวมกลุ่มตัวอย่างทั้งสิ้น 7 ปราสาท ข้อมูลที่ได้มาเป็นข้อมูลปฐมภูมิ และเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ ลงพื้นที่เก็บข้อมูลภาพถ่ายลวดลายจำหลัก โดยเรียงลำดับการลงพื้นที่จากทิศตะวันตกไปทิศตะวันออกตามแผนที่ ดังนี้ ปราสาทหินพิมาย จังหวัดนครราชสีมา ปราสาทหินพนมรุ้ง

ปราสาทเมืองต่ำ จังหวัดบุรีรัมย์ ปราสาทบ้านพลวง ปราสาทตาเมือนธม และปราสาทศีขรภูมิ จังหวัดสุรินทร์ ปราสาทสระกำแพงใหญ่ ปราสาทปรางกู่ จังหวัดศรีสะเกษ ปราสาททองหลาง ปราสาทบ้านเบ็ญ จังหวัดอุบลราชธานี ตามลำดับ การสอบถามข้อมูลทางโทรศัพท์ และขอข้อมูลไฟล์รูปภาพ จากสำนักศิลปากรที่ 10 นครราชสีมา จัดกลุ่มไฟล์ภาพตามตำแหน่งปราสาท และจังหวัดที่ตั้งตามลำดับ เพื่อให้ง่ายต่อการคัดแยกสามารถเขียนแผนผังการจำแนกฟรีซกรุป แต่ละประเภทได้ดังนี้



ภาพประกอบ 2 แผนผังคัดแยกลวดลายฟรีซกรุป

ผลการวิจัย

อีสานใต้ประกอบด้วย 5 จังหวัด ได้แก่ นครราชสีมา บุรีรัมย์ สุรินทร์ ศรีสะเกษ อุบลราชธานี เมื่อกล่าวถึงปราสาทหินแล้ว กลุ่มจังหวัดอีสานใต้มีปราสาทหินตั้งอยู่เป็นจำนวนมาก มีหลายปราสาทที่มีความสมบูรณ์ และได้รับการบูรณะเพื่ออนุรักษ์ศิลปะ ตลอดจนพัฒนาเป็นแหล่งท่องเที่ยวที่สำคัญให้กับจังหวัดต่าง ๆ ในกลุ่มอีสานใต้ เมื่อทำการสำรวจ พบว่ามีปราสาทหินที่ยังพบลวดลายจำนวนมาก ดังที่แสดงในภาพประกอบ 13

ภาพประกอบ 3 แผนที่แสดงตำแหน่งที่ตั้งของปราสาทหินในกลุ่มจังหวัดอีสานใต้

จากการสำรวจ และวิเคราะห์ลวดลาย พบลวดลายกรุปการหมุนรูป D_4, D_8 ดังภาพประกอบ 4

ภาพประกอบ 4 ตัวอย่างลวดลายกรุปการหมุนรูป D_4, D_8 ที่ปรากฏบนปราสาทในจังหวัดอีสานใต้

นอกจากนี้ ยังพบลวดลายฟรีซกรุป 4 ประเภท จากทั้งหมด 7 ประเภท ดังแสดงในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 การพบประเภทสมมาตรบนลวดลายจำหลักของปราสาทต่าง ๆ

ชื่อปราสาท	จังหวัด	P111	P1m1	P11g	P11m	P211	P2mg	P2mm
ปราสาทพิมาย	นครราชสีมา	พบ	พบ	ไม่พบ	พบ	ไม่พบ	ไม่พบ	พบ
ปราสาทเมืองต่ำ	บุรีรัมย์	พบ	พบ	ไม่พบ	พบ	ไม่พบ	ไม่พบ	พบ
ปราสาทพนมรุ้ง	บุรีรัมย์	พบ	พบ	ไม่พบ	พบ	ไม่พบ	ไม่พบ	พบ
ปราสาทบ้านพลวง	สุรินทร์	พบ	พบ	ไม่พบ	พบ	ไม่พบ	ไม่พบ	พบ
ปราสาทตาเมือนธม	สุรินทร์	ไม่พบ	ไม่พบ	ไม่พบ	พบ	ไม่พบ	ไม่พบ	พบ
ปราสาทศีขรภูมิ	สุรินทร์	พบ	พบ	ไม่พบ	ไม่พบ	ไม่พบ	ไม่พบ	พบ
ปราสาทสระกำแพงใหญ่	ศรีสะเกษ	พบ	พบ	ไม่พบ	พบ	ไม่พบ	ไม่พบ	พบ

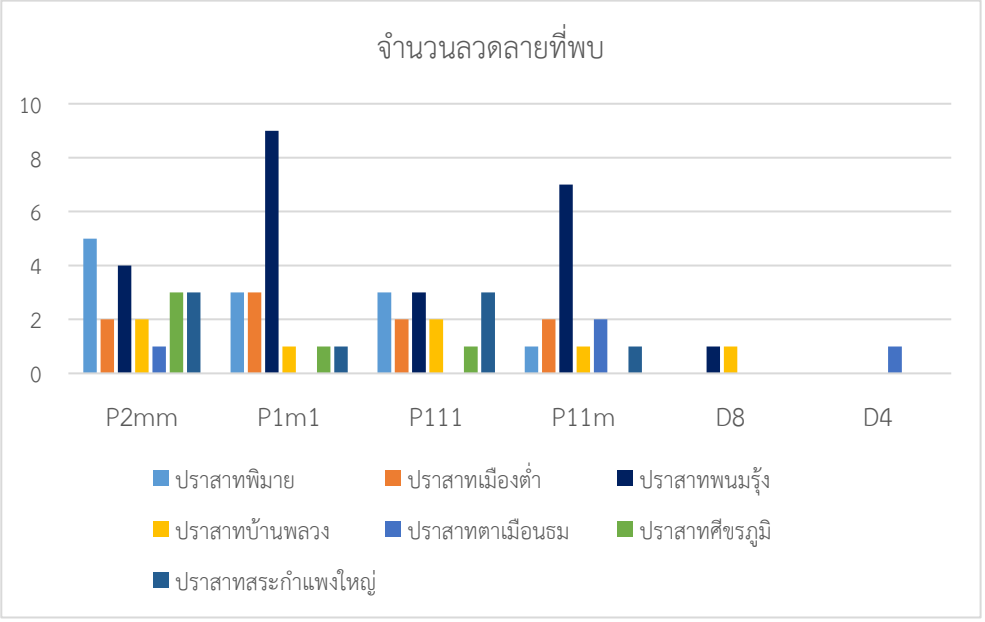
จากตารางที่ 3 จะเห็นว่าเราพบความสมมาตรแบบฟรีซกรุป 4 ประเภท ได้แก่ P111, P1m1, P11m และ P2mm ซึ่งแสดงตัวอย่างแต่ละประเภทดังภาพประกอบ 5

ภาพประกอบ 5 ตัวอย่างลวดลายแบบฟรีซกรุปประเภท P2mm, P111, P1m1 และ P11m ตามลำดับ

และเมื่อนำมาแจกแจงความถี่ จะสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4 และนำเสนอเป็นแผนภูมิแท่งดังแสดงในภาพประกอบ 6

ตารางที่ 4 จำนวนลวดลายที่กระจายไปยังประเภทสมมาตรทั้ง 7 แบบของปราสาทต่าง ๆ

	ปราสาทพิมาย	**ปราสาทเมืองต่ำ**	**ปราสาทพนมรุ้ง**	**ปราสาทบ้านพลวง**	**ปราสาทตาเมือนธม**	**ปราสาทศีขรภูมิ**	**ปราสาทสระกำแพงใหญ่**
P2mm	5	2	4	2	1	3	3
P1m1	3	3	9	1	0	1	1
P111	3	2	3	2	0	1	3
P11m	1	2	7	1	2	0	1
D_8	0	0	1	1	0	0	0
D_4	0	0	0	0	1	0	0
รวม	12	9	24	7	4	5	8



ภาพประกอบ 6 แผนภูมิแท่งแสดงการกระจายตัวประเภทสมมาตรของลายจำหลักในปราสาทหินของจังหวัดในกลุ่มอีสานใต้

สรุปและอภิปรายผล

สามารถเก็บภาพลวดลายจำหลักได้ทั้งสิ้น 7 ปราสาท ครอบคลุม 5 จังหวัดอีสานใต้ เก็บภาพลวดลายจำหลักประเภทฟรีซกรุปมีทั้งสิ้น 60 ลวดลาย ประเภทสมมาตรที่พบ ได้แก่ ลวดลาย ฟรีซกรุปประเภท P111, P1m1, P11m, P2mm และลวดลายกรุปการหมุนรูป D_4, D_8 ในส่วนประเภทสมมาตรที่ไม่พบเลย ได้แก่ ฟรีซกรุปประเภท P11g, P211 และ P2mg รวมถึงลวดลายวอลเปเปอร์กรุปก็ไม่พบเลย จากผลการศึกษาทำให้ทราบว่า สถาปัตยกรรมปราสาทหินที่กระจายตัวอยู่ตามจังหวัดต่าง ๆ ในเขตอีสานใต้นั้น ถึงแม้จะมีลวดลายจำนวนมาก แต่กลับมีรูปแบบสมมาตรที่มีความหลากหลายน้อย ซึ่งแตกต่างจากงานวิจัยที่ทำการสำรวจสถาปัตยกรรมในที่อื่น ๆ เช่น พระราชวังอารัมบลา ประเทศสเปน (Bodner B. L., 2013) มัสยิดใหญ่สุลต่านกาบูส ประเทศโอมาน (Glenn R. L., et al 2014) ที่ล้วนแล้วแต่พบความสมมาตรที่หลากหลาย โดยพบทั้งฟรีซกรุป และวอลเปเปอร์กรุป นอกจากนี้ ยังพบครบทุกประเภทอีกด้วย การสืบหาความเชื่อมโยงจากทักษะการออกแบบลวดลาย ประกอบกับองค์ความรู้ทางประวัติศาสตร์ ปรัชญา และความเชื่อ อันอาจนำไปสู่การค้นพบแนวคิดเชิงประวัติศาสตร์ใหม่ ๆ

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณสำนักงานคณะกรรมการการวิจัยแห่งชาติ (วช.) ผู้สนับสนุนทุนวิจัย ขอขอบคุณสำนักศิลปากรที่ 10 นครราชสีมาที่อนุญาตให้เก็บข้อมูล รวมทั้งขอขอบคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ ด้านการสนับสนุนสถานที่และสิ่งอำนวยความสะดวก

เอกสารอ้างอิง

Bodner B.L. (2013). The Planar Crystallographic Groups Represented at the Alhambra. *Proceeding of Bridges 2013: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture.* Enschede, Netherlands, 225-232.

Cohen M.M. & Pilgrim K.M. (2004). *Group and Geometry: Abridge to the Math major, Department of Mathematics*. USA: Cornell and Indiana.

Fedorov E.S. (1891). The Symmetry of Real Systems of Configurations. *Zap. Min. Obshch,* 28, 1-146.

Glenn R.L., Haftamu M. G. Y. & Fahad M. H. K. (2014). Symmetry Groups of Islamic Patterns at the Sultan Qaboos Grand Mosque. *Proceeding of Bridges 2014: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture.,* Seoul, Korea, 183-190.

Lekka L. & Dascalopoulos S. (2008). Motifs and Symmetry Characteristics of the Ornamentation on Traditional Greek Woven Textiles from the Area of the Aegean. *Fibres and Textiles in Eastern Europe*, 68, 74-68.

Malouise A.N.L.P. & Analyn V.S.A. (2016). Mathematical and Anthropological Analysis of Northern Luzon Funeral Textile. *Philipp. J. Sci*, 145, 89-103.

Nagpaul S.R. & Jain S.K. (2005). *Topics in Applied Abstract Algebra.* USA: The Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics Thomson Learning.

Perez-Gomez, R. (1987). The Four Regular Mosaic Missing in the Alhumbra. *Computer and Mathematics with Application*, 14, 133-137.

Polya, G. (1924). Uber die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. *Zeitschrift fur Kristallograpie-Crystalline Materials*, 60, 278-82.

Reinhardt, P.A. & Welter L. (1999). Symmetry Analysis of Embroideries on Greek Women's Chemises. *Clothing and Textiles Research Journal*, 17, 176-190.