

การจัดสรรทรัพยากรแบบการบวกและแบบการคูณออกจากภาพ
โดยใช้วิธีการสปริทเบรกแมน
Image denoising for removing additive and multiplicative noise using
split Bregman method

ศิริวรรณ จันทร์แก่น¹ และ โสภิตา สุขญาณกิจ^{2*}
Siriwan Chankan¹, and Sopida Sukyankij^{2*}

¹คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกาญจนบุรี

¹Faculty of Science and Technology, Kanchanaburi Rajabhat University

²คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา

² Faculty of Science and Technology, Phranakhon Si Ayutthaya Rajabhat University

Email: sopida.jew@aru.ac.th

Received : October 9, 2023

Revised : April 5, 2024

Accepted : April 19, 2024

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ผู้วิจัยนำเสนอวิธีการสปริทเบรกแมนสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนแบบการบวกและแบบการคูณออกจากภาพที่มีประสิทธิภาพและความแม่นยำสูง วิธีการนี้เกี่ยวข้องกับการหาค่าต่ำที่สุดของฟังก์ชันนัลซึ่งถูกเขียนในรูปอินทิกรัลของฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน จึงทำให้การกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ โดยวิธีการนี้สามารถทำได้โดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบความแม่นยำระหว่างวิธีการเชิงตัวเลขที่ได้นำเสนอและวิธีการกรองภาพ ผลการทดลองเชิงตัวเลขกับภาพสังเคราะห์และภาพจริง พบว่า ขั้นตอนวิธีการเชิงตัวเลขที่ผู้วิจัยได้นำเสนอสามารถกำจัดสัญญาณรบกวนดังกล่าวได้อย่างมีประสิทธิภาพและแม่นยำกว่าวิธีการกรองภาพซึ่งเป็นวิธีพื้นฐานในการซ่อมแซมภาพ

คำสำคัญ: การกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ ตัวแบบเชิงการแปรผัน วิธีการสปริทเบรกแมน
วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

ABSTRACT

This research presents a novel Split Bregman method for removing both additive and multiplicative noise from images with high efficiency and accuracy. The method involves finding the minimum of a functional, which is written in terms of integrals of functions and their derivatives. This formulation allows noise removal by solving the associated differential equations. The researchers compared the accuracy of their proposed numerical method with conventional image filtering techniques. Experimental results on synthetic and real images demonstrated that the proposed method outperforms standard filtering techniques in terms of noise removal effectiveness and detail preservation.

Keywords: Image Denoising, Variational Model, Split Bregman Method, Finite Difference Method

บทนำ

โดยทั่วไปภาพถ่ายมักถูกเจือปนด้วยสัญญาณรบกวนจากกระบวนการรับและส่งสัญญาณภาพ เพื่อให้ได้ข้อมูลบนภาพที่มีความคมชัดสูงขึ้นและสามารถนำไปใช้ในทางปฏิบัติได้อย่างสะดวกและแม่นยำ กระบวนการสร้างภาพที่คมชัดจากภาพที่มีสัญญาณรบกวน จึงเป็นขั้นตอนสำคัญในการประยุกต์หลายด้าน กระบวนการดังกล่าวเรียกว่าการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพหรือการซ่อมแซมภาพ การประยุกต์ซึ่งต้องการกระบวนการซ่อมแซมภาพ ได้แก่ การประยุกต์ทางด้านศิลปะ ดาราศาสตร์ ธรณีฟิสิกส์ อาชีววิทยา และศาสตร์แขนงอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการใช้และสร้างภาพถ่าย

สัญญาณรบกวนที่พบในภาพถ่ายโดยทั่วไปมี 2 แบบคือ สัญญาณรบกวนแบบการบวก (Additive Noise) และสัญญาณรบกวนแบบการคูณ (Multiplicative Noise) หรือ สเปกเคิล (Speckle) การกำจัดสัญญาณรบกวนแบบการคูณออกจากภาพถ่าย ค่อนข้างยากกว่าการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบการบวก เนื่องจากการคูณระหว่างสัญญาณรบกวน และภาพต้นฉบับทำให้มีความถี่สูง รวมทั้งการแจกแจงของสัญญาณรบกวนชนิดนี้ไม่เป็นแบบเกาส์เซียน โดยทั่วไปการแจกแจงของสัญญาณรบกวนชนิดนี้เป็นการแจกแจงแบบแกมมา (Gamma) หรือแบบเรย์ลี (Rayleigh) เมื่อไม่นานมานี้ ในงานวิจัยของ Hirakawa และ Park (Hirakawa และ Park, 2006) และคณะวิจัยของ Lukin (Lukin et al., 2010) ได้แสดงให้เห็นว่าภาพไม่จำเป็นต้องถูกเจือปนด้วยสัญญาณรบกวน

แบบการบวกหรือแบบการคูณเพียงแบบเดียวเท่านั้น ผลการวิจัยชี้ให้เห็นว่าภาพถูกเจือปนด้วยสัญญาณรบกวนแบบผสม ซึ่งประกอบด้วยสัญญาณรบกวนแบบการบวกและสัญญาณรบกวนแบบการคูณ

การกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพสามารถทำได้หลากหลายวิธี วิธีการหนึ่งที่ย่อยและสามารถปรับปรุงภาพได้ดีที่มักถูกเลือกใช้ ได้แก่ วิธีการกรองภาพ (Image Filtering) (Zhu and Huang, 2012; Chandel and Gupta, 2013; Desai et al., 2020) ซึ่งเป็นวิธีการที่สามารถกำจัดสัญญาณรบกวน โดยรักษาการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณที่คมชัดและมีประสิทธิภาพในภาพดิจิทัลโดยไม่ทำให้เกิดการเบลอและการทำลายขอบของวัตถุภายในภาพ และวิธีการอีกหนึ่งวิธีที่ได้รับการยอมรับและถูกใช้อย่างแพร่หลาย คือวิธีการเชิงการแปรผัน (Variational Method) (Rudin et al., 1992; Jin and Yang, 2010; Sagheer and George, 2020) ซึ่งได้ใช้ตัวแบบการสร้างภาพมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา เมื่อไม่นานมานี้ Goldstein และ Osher (Goldstein and Osher., 2009) ได้คิดค้นเทคนิคการทำซ้ำแบบสลับที่เรียกว่า วิธีการสปริตเบรกแมน (Split Bregman (SB) Method) เพื่อแก้ปัญหาเชิงการแปรผันสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ ซึ่งข้อดีของวิธีการนี้คือมีประสิทธิภาพสูงและลู่เข้าสู่คำตอบอย่างรวดเร็ว

วิธีการกรองภาพ (Chandel and Gupta., 2013) เป็นวิธีการปรับปรุงภาพโดยการนำภาพไปผ่านตัวกรองสัญญาณ เพื่อให้ได้ภาพที่มีคุณสมบัติตามต้องการ การกรองสัญญาณรบกวนชนิดตัวกรองมัธยฐาน (Median Filter) เป็นเทคนิคการกรองที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งมักใช้ในการประมวลผลภาพและเป็นที่รู้จักในการรักษาการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณที่คมชัด และมีประสิทธิภาพในภาพดิจิทัลโดยไม่ทำให้เกิดการเบลอและการทำลายขอบที่เกี่ยวข้อง ซึ่งโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์หลาย ๆ โปรแกรม ได้มีการเขียนคำสั่งรองรับสำหรับใช้งานการกรองสัญญาณดังกล่าวมากมาย

แนวคิดสำคัญสำหรับการกำจัดสัญญาณรบกวนโดยวิธีการเชิงการแปรผัน เริ่มต้นจากการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับภาพถ่ายดิจิทัล ซึ่งพิจารณาภาพเชิงสเกลาร์แบบสองมิติเป็นฟังก์ชัน I ที่นิยามบนโดเมนภาพ (Image Domain) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ และเรนจ์ของภาพ $V \subset \mathbb{R} \cup \{0\}$ เพื่อระบุว่า I เป็นภาพที่มีความเข้มภาพ (Image Intensity) อยู่ในอัตราส่วนความเข้มภาพในโทนสีเทา (Grayscale) นั่นคือ ภาพ I เกี่ยวข้องกับแต่ละสมาชิก $x \in \Omega$ และค่าความเข้มโทนสีเทา $I(x) \in V$ เพื่ออำนวยความสะดวกทางคณิตศาสตร์ในงานวิจัยนี้ เราสามารถสมมติได้โดยไม่เสียหลักการสำคัญว่า $\Omega = [1, M] \times [1, N] \subset \mathbb{R}^2$ และ $V = [0, 255]$ สำหรับภาพที่มีความเข้มแบบสีเทาสองมิติ เมื่อ M และ N เป็นจำนวนเต็มบวก

งานวิจัยจำนวนมากใช้ตัวแบบการสร้างภาพ (Image Formation Model) ด้วยสัญญาณรบกวนแบบการบวกซึ่งถูกพบในกระบวนการบันทึกสัญญาณภาพด้วยเครื่องมือดิจิทัล เป้าหมายในการกำจัดสัญญาณรบกวนจากออกจากภาพ ซึ่งเจือปนด้วยสัญญาณรบกวนแบบการบวก (ไม่ทราบ) η คือการกู้คืนสภาพหรือซ่อมแซมภาพต้นฉบับ (ไม่ทราบ) u จากภาพที่มีสัญญาณรบกวน (ทราบ) z โดยตัวแบบสัญญาณรบกวนแบบการบวกเขียนได้เป็น

$$z = u + \eta \quad (1)$$

โดยทั่วไป η แทนสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนซึ่งมีค่าเฉลี่ยศูนย์

ในทางปฏิบัติภาพถ่ายคลื่นเสียงความถี่สูง ภาพเลเซอร์ และภาพจากระบบเรดาร์ เป็นภาพที่ได้จากระบบการสร้างภาพแบบโคฮีเลนต์ (Coherent Imaging System) ซึ่งภาพต้นฉบับที่ได้จากระบบการสร้างภาพดังกล่าวมักถูกเจือปนด้วยสัญญาณรบกวนแบบการคูณ หรือ สเปกเคิล η โดยตัวแบบสัญญาณรบกวนแบบการคูณกำหนดโดย

$$z = u\eta \quad (2)$$

ในที่นี้เราสามารถสมมติได้โดยไม่เสียหลักการสำคัญว่า $u, \eta > 0$ เนื่องจากการคูณระหว่างสัญญาณรบกวนและภาพต้นฉบับทำให้มีความถี่สูง ส่งผลให้การกำจัดสัญญาณรบกวนชนิดนี้ออกจากภาพค่อนข้างยากกว่าการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบการบวก

ในงานวิจัยของ Hirakawa และ Park (Hirakawa and Park., 2006) และคณะวิจัยของ Lukin (Lukin et al., 2010) ได้แสดงให้เห็นว่า ภาพไม่จำเป็นต้องถูกเจือปนด้วยสัญญาณรบกวนแบบบวกหรือแบบการคูณเพียงแบบเดียวเท่านั้น ผลการวิจัยชี้ให้เห็นว่าภาพถูกเจือปนด้วยสัญญาณรบกวนแบบผสมซึ่งประกอบด้วยสัญญาณรบกวนแบบการบวกและสัญญาณรบกวนแบบการคูณ โดยตัวแบบดังกล่าวสามารถเขียนได้เป็น

$$z = u + k_0\eta + k_1u\zeta \quad (3)$$

โดยที่ k_0 และ k_1 เป็นค่าคงตัว η และ ζ แทนส่วนประกอบของสัญญาณรบกวนแบบการบวกและแบบการคูณตามลำดับ

แนวทางในการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพที่ถูกเจือปน ด้วยสัญญาณรบกวนแบบผสมทั้งสัญญาณรบกวนแบบการบวกและแบบการคูณสำหรับตัวแบบ (3) สามารถทำได้โดยกำจัดสัญญาณรบกวนแบบการบวก แล้วตามด้วยการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบการคูณ หรือในทางกลับกัน เห็นได้ว่าการกำจัดสัญญาณรบกวนด้วยวิธีการดังกล่าวเป็นการใช้วิธีการแบบสองขั้นตอน ซึ่งต้องใช้ทรัพยากรในการคำนวณค่อนข้างสูง เพื่อลดการใช้ทรัพยากรในการคำนวณคณะวิจัยของ Chumchob (Chumchob et al., 2013) จึงได้นำเสนอตัวแบบเชิงการแปรผันสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนแบบผสม ในขั้นตอนเดียวที่สามารถกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพได้เป็นอย่างดี และให้ความคมชัดของเส้นที่ปรากฏในภาพสูง ดังนี้

$$\arg \min_{u \in BV(\Omega)} \left\{ J_{\alpha_1, \alpha_2}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| d\Omega + \frac{\alpha_1}{2} \int_{\Omega} (u - z)^2 d\Omega + \alpha_2 \int_{\Omega} (u + ze^{-u}) d\Omega \right\} \quad (4)$$

เมื่อ $BV(\Omega)$ แทนปริภูมิการแปรผันแบบมีขอบเขต $\int_{\Omega} |\nabla u| d\Omega$ เป็นเร็กกิวลาร์ไรซ์เซชันแบบการแปรผันรวม $\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - z)^2 d\Omega$ และ $\int_{\Omega} (u + ze^{-u}) d\Omega$ เป็นเทอมวัดความเหมาะสมของข้อมูลระหว่าง

ภาพที่กำลังถูกซ่อมแซม u กับภาพที่มีสัญญาณรบกวน z และ $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ แทนพารามิเตอร์เร็กกิวลาร์ไรซ์เซชันที่ใช้ปรับสมดุล ระหว่างเทอมวัดความเหมาะสมของข้อมูลจากสัญญาณรบกวนแบบการบวกในเทอมที่ 2 และแบบการคูณในเทอมที่ 3 ตามลำดับ

Goldstein และ Osher (Goldstein and Osher., 2009) ได้คิดค้นเทคนิคการทำซ้ำแบบสลับที่เรียกว่า วิธีการ SB เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาเชิงการแปรผัน สำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ ซึ่งข้อดีของวิธีการนี้คือมีประสิทธิภาพสูงและลู่เข้าสู่คำตอบอย่างรวดเร็ว ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจึงได้นำเสนอวิธีการ SB เพื่อใช้สำหรับการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ ซึ่งถูกเจือปนด้วยสัญญาณรบกวนแบบการบวกและแบบการคูณสำหรับตัวแบบ (4)

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ตั้งสมมติฐานว่า ภาพถูกเจือปนด้วยการผสมของสัญญาณรบกวนแบบการบวกและแบบการคูณ และนำเสนอวิธีการ SB ที่มีประสิทธิภาพและแม่นยำในการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ นอกจากนี้ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบความแม่นยำของการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพระหว่างวิธีการ SB และวิธีการกรองภาพ

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อนำเสนอวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนแบบการบวกและการคูณที่มีประสิทธิภาพและแม่นยำ
2. เพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำของการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ ระหว่างวิธีการเชิงตัวเลขที่ได้นำเสนอและวิธีการกรองภาพ

วิธีดำเนินงานวิจัย

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอวิธีการเชิงตัวเลขแบบใหม่สำหรับการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ ซึ่งถูกเจือปนด้วยสัญญาณรบกวนแบบการบวกและแบบการคูณสำหรับตัวแบบ (4) วิธีการที่ผู้วิจัยได้นำเสนอคือวิธีการ SB ซึ่งเป็นวิธีการที่รวดเร็วและมีประสิทธิภาพสูง

1. การดิสครีไทซ์เซชันแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

การดำเนินการสำหรับดิสครีไทซ์แบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ของอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสอง เขียนแทนด้วย $\partial_x^+, \partial_x^-, \partial_y^+, \partial_y^-, \partial_x^+ \partial_x^-, \partial_x^- \partial_x^-, \partial_y^+ \partial_y^-, \partial_y^- \partial_y^-, \partial_x^+ \partial_y^-, \partial_x^- \partial_y^-$ และ $\partial_y^+ \partial_x^-, \partial_y^- \partial_x^-$ ตามลำดับ สังเกตว่า ผู้วิจัยประยุกต์ใช้เงื่อนไขค่าขอบแบบคาบในการดิสครีไทซ์ ซึ่งมักพบบ่อยครั้งในการแก้ปัญหาการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ เนื่องจากสามารถรักษาความคมชัดของภาพ และช่วยให้สามารถคำนวณตัวเลขได้อย่างรวดเร็ว

กำหนดให้โดเมนแบบดิสครีไทซ์แทนด้วย

$$\Omega_h = \{(x, y) \in \Omega \mid (x, y) = (x_i, y_j), x_i = i, y_j = j, i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N\}$$

เพื่อความสะดวกสำหรับแต่ละจุดกริด $(x_i, y_j) \in \Omega_h$ เราจะเขียนแทนด้วย (i, j) โดยที่พิกัด x และ y จะวางแนวตามคอลัมน์และแถว ตามลำดับ ดังนั้นการประมาณค่าแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ของอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ u ที่แต่ละจุดกริด (i, j) สามารถกำหนดโดย

$$\begin{aligned} \partial_x^+(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i,j+1} - (u)_{i,j}, & 1 \leq i \leq M, 1 \leq j < N \\ (u)_{i,1} - (u)_{i,j}, & 1 \leq i \leq M, j = N \end{cases} \\ \partial_y^+(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i+1,j} - (u)_{i,j}, & 1 \leq i < M, 1 \leq j \leq N \\ (u)_{1,j} - (u)_{i,j}, & i = M, 1 \leq j \leq N \end{cases} \\ \partial_x^-(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i,j} - (u)_{i,j-1}, & 1 \leq i \leq M, 1 < j \leq N \\ (u)_{i,j} - (u)_{i,N}, & 1 \leq i \leq M, j = 1 \end{cases} \\ \partial_y^-(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i,j} - (u)_{i-1,j}, & 1 < i \leq M, 1 \leq j \leq N \\ (u)_{i,j} - (u)_{M,j}, & i = 1, 1 \leq j \leq N \end{cases} \end{aligned}$$

การประมาณค่าแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ของอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ u ที่แต่ละจุดกริด (i, j) สามารถกำหนดโดย

$$\partial_x^+ \partial_x^-(u)_{i,j} = \partial_x^- \partial_x^+(u)_{i,j} = \begin{cases} (u)_{i,N} - 2(u)_{i,j} + (u)_{i,j+1}, & 1 \leq i \leq M, j = 1 \\ (u)_{i,j-1} - 2(u)_{i,j} + (u)_{i,j+1}, & 1 \leq i \leq M, 1 < j < N \\ (u)_{i,j-1} - 2(u)_{i,j} + (u)_{i,1}, & 1 \leq i \leq M, j = N \end{cases}$$

$$\partial_y^+ \partial_y^- (u)_{i,j} = \partial_y^- \partial_y^+ (u)_{i,j} = \begin{cases} (u)_{M,j} - 2(u)_{i,j} + (u)_{i+1,j}, & i=1, 1 \leq j \leq N \\ (u)_{i-1,j} - 2(u)_{i,j} + (u)_{i+1,j}, & 1 < i < M, 1 \leq j \leq N \\ (u)_{i-1,j} - 2(u)_{i,j} + (u)_{1,j}, & i=M, 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

$$\partial_x^+ \partial_y^- (u)_{i,j} = \begin{cases} (u)_{i,j+1} - (u)_{i,j} - (u)_{M,j+1} + (u)_{M,j}, & i=1, 1 \leq j < N \\ (u)_{i,1} - (u)_{i,j} - (u)_{M,1} + (u)_{M,j}, & i=1, j=N \\ (u)_{i,j+1} - (u)_{i,j} - (u)_{i-1,j+1} + (u)_{i-1,j}, & 1 < i \leq M, 1 \leq j < N \\ (u)_{i,1} - (u)_{i,j} - (u)_{i-1,1} + (u)_{i-1,j}, & 1 < i \leq M, j=N \end{cases}$$

$$\partial_y^+ \partial_x^- (u)_{i,j} = \begin{cases} (u)_{i+1,j} - (u)_{i,j} - (u)_{i,N} + (u)_{i,N}, & 1 \leq j < M, j=1 \\ (u)_{1,j} - (u)_{i,j} - (u)_{1,N} + (u)_{i,N}, & i=M, j=1 \\ (u)_{i+1,j} - (u)_{i,j} - (u)_{i+1,j-1} + (u)_{i,j-1}, & 1 \leq i < M, 1 < j \leq N \\ (u)_{1,j} - (u)_{i,j} - (u)_{i,j-1} + (u)_{i,j-1}, & i=M, 1 < j \leq N \end{cases}$$

2. วิธีการ SB สำหรับตัวแบบ (4)

ในการประยุกต์ใช้วิธีการ SB สำหรับตัวแบบ (4) ดำเนินการโดยแนะนำตัวแปรเวกเตอร์เสริม $w = (w_1, w_2)^T$ พารามิเตอร์การทำซ้ำเบรกแมน (Bregman iterative parameter) $b = (b_1, b_2)^T$ และพารามิเตอร์ตัวโทษ (penalty parameter) $\theta > 0$ เพื่อแปลงปัญหาเชิงการแปรผัน (4) เป็น

$$\arg \min_{u \in BV(\Omega)} \left\{ J_{\alpha_1, \alpha_2}(w; b) = \int_{\Omega} |w| d\Omega + \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (w - \nabla u - b)^2 d\Omega + \frac{\alpha_1}{2} \int_{\Omega} (u - z)^2 d\Omega + \alpha_2 \int_{\Omega} (u + ze^{-u}) d\Omega \right\} \quad (5)$$

จากนั้นใช้เทคนิคการทำซ้ำแบบสลับในการหาผลเฉลยของปัญหาเชิงการแปรผัน (5) ซึ่งเป็นการแก้ปัญหาย่อยสองปัญหาสำหรับ u และ w โดยจะดำเนินการทำซ้ำแบบสลับจนกระทั่งลำดับของ u สอดคล้องกับเกณฑ์การหยุด

$$\frac{\|u^{[new]} - u^{[old]}\|_{L_2}^2}{\|u^{[new]}\|_{L_2}^2} < \varepsilon$$

เมื่อ $u^{[new]}$ และ $u^{[old]}$ แทนเวกเตอร์ของ u ที่ได้จากการทำซ้ำรอบปัจจุบันและการทำซ้ำรอบก่อนหน้า $\varepsilon > 0$ แทนค่าความแม่นยำ และ $\|\cdot\|_2$ แทนนอร์มแบบยูคลิด (Euclidean norm) สำหรับ u, w และการปรับปรุงพารามิเตอร์ b กำหนดดังนี้

$$u^{[new]} = \arg \min_u \left\{ \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (w^{[old]} - \nabla u - b^{[old]})^2 d\Omega + \frac{\alpha_1}{2} \int_{\Omega} (u - z)^2 d\Omega + \alpha_2 \int_{\Omega} (u + ze^{-u}) d\Omega \right\} \quad (6)$$

$$w^{[new]} = \arg \min_w \left\{ \int_{\Omega} |w| d\Omega + \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (w - \nabla u^{[new]} - b^{[old]})^2 d\Omega \right\} \quad (7)$$

$$b^{[new]} = b^{[old]} + \nabla u^{[new]} - w^{[new]} \quad (8)$$

การแก้ปัญหาย่อย u สามารถแก้ได้ด้วยวิธีการหาคำตอบที่มีรูปแบบปิด และการแก้ปัญหาย่อย w สามารถแก้ได้จากสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่เกี่ยวข้อง

ปัญหาย่อย u เมื่อตรงตัวแปร $(w; b)$ ใน (6) แล้วใช้แคลคูลัสของการแปรผันเพื่อแก้ปัญหาค่าต่ำที่สุด จะได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ดังนี้

$$u - \frac{\theta}{\alpha_1} \Delta u = z - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1 - ze^{-u}) - \frac{\theta}{\alpha_1} \operatorname{div}(w - b) \quad (9)$$

เมื่อทำการดิสครีไทซ์เซชันโดยวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ จะได้ว่า

$$(u)_{i,j} - \frac{\theta}{\alpha_1} (\partial_x^- \partial_x^+ (u)_{i,j} - \partial_y^- \partial_y^+ (u)_{i,j}) = (G)_{i,j} \quad (10)$$

$$\text{โดยที่ } (G)_{i,j} = (z)_{i,j} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1 - (z)_{i,j} e^{-(u)_{i,j}}) - \frac{\theta}{\alpha_1} (\partial_x^- ((w_1)_{i,j} - (b_1)_{i,j}) - \partial_y^- ((w_2)_{i,j} - (b_2)_{i,j}))$$

จากนั้นใช้วิธีการทำซ้ำภายในและภายนอกเพื่อแก้ปัญหสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น (10) สำหรับการทำให้ซ้ำภายนอก เริ่มต้นจากการกำหนดคำตอบเริ่มต้น $u^{[0]}$ (ในกรณีเฉพาะ $u^{[0]} = z$) จากนั้นคำนวณหาลำดับของคำตอบ $u^{[1]}, u^{[2]}, \dots, u^{[v]}, u^{[v+1]}, \dots$ โดยดำเนินการแก้ระบบสมการของสมการเชิงเส้น

$$(u^{[v+1]})_{i,j} - \frac{\theta}{\alpha_1} (\Delta u^{[v+1]})_{i,j} = G(u^{[v]})_{i,j} \quad (11)$$

จนกระทั่งลำดับของ u สอดคล้องกับเกณฑ์การหยุด $\frac{\|u^{[new]} - u^{[old]}\|_{l_2}^2}{\|u^{[new]}\|_{l_2}^2} \leq 10^{-5}$ เห็นได้ว่า (11) ถูกทำ

ให้เป็นเชิงเส้นโดยวิธีการทำซ้ำแบบจุดตรึง และทำการดิสครีตไทซ์เซชันด้วยวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ โดยที่ v แทนดัชนีสำหรับขั้นตอนการทำซ้ำภายนอก และ

$$(G^{[v]})_{i,j} = (z)_{i,j} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(1 - (z)_{i,j} e^{-(u^{[v]})_{i,j}} \right) - \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\partial_x^- ((w_1)_{i,j} - (b_1)_{i,j}) - \partial_y^- ((w_2)_{i,j} - (b_2)_{i,j}) \right)$$

เมื่อใช้การแปลงฟูเรียร์แบบดิสครีต F พร้อมด้วยเงื่อนไขค่าขอบแบบคาบกับ (10) จะได้

$$F \left((u)_{i,j} - \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\partial_x^- \partial_x^+ (u)_{i,j} - \partial_y^- \partial_y^+ (u)_{i,j} \right) \right) = F \left((G)_{i,j} \right) \quad (12)$$

หรือ

$$\underbrace{1 - 2 \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\cos \left(\frac{2\pi s}{N} \right) + \cos \left(\frac{2\pi r}{M} \right) - 2 \right)}_{\varsigma} F \{ (u)_{i,j} \} = F \{ (G)_{i,j} \} \quad (13)$$

เมื่อ $i \in [1, M]$ และ $j \in [1, N]$ แทนดัชนีในโดเมนเวลา $r \in [0, M)$ และ $s \in [0, N)$ แทนดัชนีในโดเมนความถี่ ดังนั้นผลเฉลยของ (10) ถูกกำหนดโดย

$$(u)_{i,j} = \text{Re} \left(F^{-1} \left(\frac{F \left((G)_{i,j} \right)}{\varsigma} \right) \right) \quad (14)$$

ในที่นี้ F^{-1} แทนการแปลงฟูเรียร์ผกผันแบบดิสครีต และ Re เป็นส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน **ปัญหาย่อย** w เมื่อตรึงตัวแปร $(u; b)$ ใน (7) แล้วใช้แคลคูลัสของการแปรผันเพื่อแก้ปัญหาค่าต่ำที่สุด จะได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ดังนี้

$$\frac{w}{|w|} + \theta(w - \nabla u - b) = 0 \quad (15)$$

จากงานวิจัยของคณะวิจัยของ Lu (Lu et al., 2016) พบว่า ผลเฉลยแน่นอนตรง (exact solution) ของ (15) กำหนดโดย

$$(w)_{i,j} = \max \left(\left| \nabla (u)_{i,j} + (b)_{i,j} \right| - \frac{1}{\theta}, 0 \right) \frac{\nabla (u)_{i,j} + (b)_{i,j}}{\left| \nabla (u)_{i,j} + (b)_{i,j} \right|} \quad (16)$$

และขั้นตอนสุดท้ายคือการปรับปรุงพารามิเตอร์การทำซ้ำแบร็กแมน โดยกำหนดให้ $b \leftarrow b + \nabla u - w$

ผลการวิจัย

คณะวิจัยได้ออกแบบการทดลองเชิงตัวเลขเพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำของการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพของวิธีการกรองภาพ และวิธีการ SB โดยการทดสอบความแม่นยำของแต่ละวิธีการจะถูกประเมินด้วยเครื่องมือการประเมินประสิทธิภาพของการปรับปรุงคุณภาพของภาพเปรียบเทียบกับภาพต้นฉบับ คือ ค่าอัตราส่วนของสัญญาณรบกวนสูงสุด (Peak Signal to Noise Ratio : PSNR)

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{255^2}{MSE} \quad (\text{หน่วยเป็นเดซิเบล})$$

ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองโดยเฉลี่ย (Mean Square Error : MSE)

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left((u^*)_{i,j} - (u)_{i,j} \right)^2$$

และค่าการวัดดัชนีความคล้ายคลึงของโครงสร้าง (Structure Similarity Index Map : SSIM)

$$SSIM = \frac{4\mu_{u^*}\mu_u\sigma_{u^*}\sigma_u}{(\mu_{u^*}^2 + \mu_u^2)(\sigma_{u^*}^2 + \sigma_u^2)}$$

$$\text{โดยที่ } \mu_{u^*} = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (u^*)_{i,j}, \quad \mu_u = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (u)_{i,j},$$

$$\sigma_{u^*} = \left(\frac{1}{MN-1} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left((u^*)_{i,j} - \mu_{u^*} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{และ} \quad \sigma_u = \left(\frac{1}{MN-1} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left((u)_{i,j} - \mu_u \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ในที่นี้ u^* และ u แทนเวกเตอร์ของภาพต้นฉบับ ซึ่งไม่มีสัญญาณรบกวนและเวกเตอร์ของภาพผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบเชิงการแปรผัน (4) ตามลำดับ ในการประเมินประสิทธิภาพของภาพผลลัพธ์ด้วยค่า PSNR และค่า SSIM ถ้าค่ายิ่งสูงจะแสดงว่าภาพผลลัพธ์ที่ได้มีคุณภาพที่ใกล้เคียงกับภาพต้นฉบับ และการประเมินประสิทธิภาพของภาพผลลัพธ์ด้วยค่า MSE ถ้าค่ายิ่งต่ำแสดงว่า ภาพผลลัพธ์ที่ได้มีคุณภาพที่ใกล้เคียงกับภาพต้นฉบับ สำหรับการประเมินประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธีการ SB ที่ได้พัฒนาขึ้น และวิธีการกรองภาพ ทุกการทดลองเชิงตัวเลขใช้ภาพที่มีความคมชัดขนาด 512×512 พิกเซล ประมวลผลด้วยโปรแกรมในระบบปฏิบัติการ MAC OS X บนเครื่องคอมพิวเตอร์ iMac Intel

Core i5 2.3 GHz RAM 8 GB และผู้วิจัยเลือกใช้พารามิเตอร์ที่ให้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด โดยผลการทดลองเชิงตัวเลขแสดงดังตารางที่ 1 – 3

ตารางที่ 1 ผลการทดลองเชิงตัวเลขค่า PSNR กับภาพสังเคราะห์ (ภาพ Ring) และภาพจริง (ภาพ Boat)

(k_0, k_1)	ภาพสังเคราะห์ (ภาพ Ring)				ภาพจริง (ภาพ Boat)			
	$PSNR^0$	$PSNR^\dagger$			$PSNR^0$	$PSNR^\dagger$		
		วิธีการ SB	วิธีการกรองภาพ			วิธีการ SB	วิธีการกรองภาพ	
			ordfilt2	medfilt2			ordfilt2	medfilt2
(4,0.25)	36.0799	55.2749	41.4114	43.5266	36.0766	40.5796	39.3924	38.7502
(4,0.50)	36.0811	55.3818	41.3924	43.5119	36.1089	40.6282	39.4239	38.7685
(4,0.75)	36.0855	55.3750	41.3942	43.5200	36.098	40.6089	39.3949	38.7392
(4,1.00)	36.0833	55.4178	41.4291	43.5485	36.0914	40.6026	39.4059	38.7406
(4,1.25)	36.1128	55.3933	41.4495	43.6030	36.0763	40.5547	39.3908	38.7319
(5,0.25)	34.1464	54.4416	39.4884	41.6360	34.1609	39.5667	37.9421	37.8591
(5,0.50)	34.1533	54.5074	39.5052	41.6642	34.1548	39.5612	37.9302	37.8481
(5,0.75)	34.1550	54.9531	39.5115	41.6592	34.1512	39.5484	37.9074	37.8487
(5,1.00)	34.1424	54.6893	39.4972	41.6681	34.1323	39.5739	37.913	37.8443
(5,1.25)	34.1629	54.4752	39.4983	41.6522	34.1718	39.5756	37.9405	37.8567

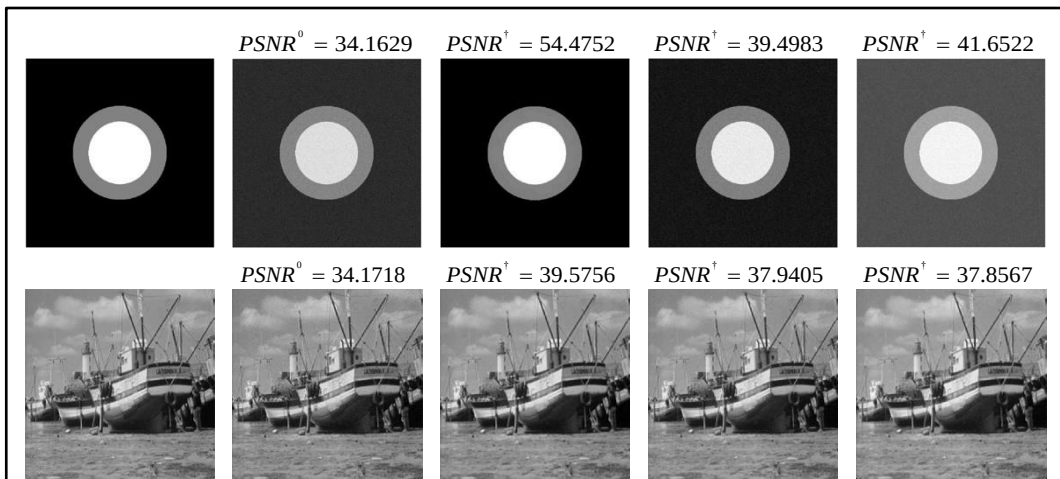
ตารางที่ 2 ผลการทดลองเชิงตัวเลขค่า MSE กับภาพสังเคราะห์ (ภาพ Ring) และภาพจริง (ภาพ Boat)

(k_0, k_1)	ภาพสังเคราะห์ (ภาพ Ring)			ภาพจริง (ภาพ Boat)		
	MSE			MSE		
	วิธีการ SB	วิธีการกรองภาพ		วิธีการ SB	วิธีการกรองภาพ	
		ordfilt2	medfilt2		ordfilt2	medfilt2
(4,0.25)	0.1945	4.6973	2.8858	5.6891	7.4779	8.6698
(4,0.50)	0.1920	4.7179	2.8956	5.6257	7.4238	8.6333
(4,0.75)	0.1873	4.7160	2.8902	5.6508	7.4736	8.6918
(4,1.00)	0.1876	4.6782	2.8713	5.6591	7.4548	8.6890
(4,1.25)	0.1858	4.6563	2.8355	5.7218	7.4806	8.7065
(5,0.25)	0.1868	7.3144	4.4605	7.1837	10.443	10.6447
(5,0.50)	0.2209	7.2862	4.4316	7.1929	10.4716	10.6716
(5,0.75)	0.2328	7.2756	4.4368	7.214	10.5268	10.6701
(5,1.00)	0.2293	7.2996	4.4276	7.1719	10.5134	10.6810
(5,1.25)	0.2069	7.2977	4.4439	7.1691	10.4469	10.6506

ตารางที่ 3 ผลการทดลองเชิงตัวเลขค่า SSIM กับภาพสังเคราะห์ (ภาพ Ring) และภาพจริง (ภาพ Boat)

(k_0, k_1)	ภาพสังเคราะห์ (ภาพ Ring)			ภาพจริง (ภาพ Boat)		
	SSIM			SSIM		
	วิธีการ SB	วิธีการกรองภาพ		วิธีการ SB	วิธีการกรองภาพ	
		ordfilt2	medfilt2		ordfilt2	medfilt2
(4,0.25)	0.9998	0.9381	0.9655	0.9694	0.9581	0.9654
(4,0.50)	0.9998	0.9379	0.9654	0.9697	0.9582	0.9656
(4,0.75)	0.9998	0.9378	0.9653	0.9695	0.9578	0.9652
(4,1.00)	0.9998	0.9382	0.9656	0.9696	0.9581	0.9652
(4,1.25)	0.9998	0.9384	0.9659	0.9692	0.958	0.9652
(5,0.25)	0.9997	0.9069	0.9473	0.9655	0.9403	0.9546
(5,0.50)	0.9997	0.9073	0.9478	0.9656	0.9402	0.9546
(5,0.75)	0.9998	0.9074	0.9478	0.9655	0.9403	0.9547
(5,1.00)	0.9997	0.9072	0.9480	0.9655	0.94	0.9547
(5,1.25)	0.9997	0.9075	0.9479	0.9655	0.9406	0.9548

จากตารางที่ 1 - 3 พบว่า ค่า PSNR และค่า SSIM มีค่าสูงขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับค่าเริ่มต้นของภาพที่มีสัญญาณรบกวน ในขณะที่ค่า MSE มีค่าน้อยลงเมื่อเทียบกับค่าเริ่มต้นของภาพที่มีสัญญาณรบกวน แสดงให้เห็นว่า วิธีการ SB สำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนแบบการบวกและการคูณมีประสิทธิภาพและแม่นยำ นอกจากนี้ยังพบว่า ค่า PSNR และค่า SSIM ที่ได้จากวิธีการ SB สูงกว่าค่าที่ได้จากวิธีการกรองภาพโดยใช้คำสั่ง `ordfilt2` และ `medfilt2` ในขณะที่ค่า MSE ที่ได้จากวิธีการ SB ต่ำกว่าค่าที่ได้จากวิธีการกรองภาพด้วยทั้งสองคำสั่งอย่างชัดเจนในทุกกรณี จึงสรุปได้ว่า วิธีการ SB มีประสิทธิภาพและความแม่นยำสูงกว่าวิธีการกรองภาพโดยใช้คำสั่ง `ordfilt2` และ `medfilt2` เพื่อเป็นการแสดงให้เห็นประสิทธิภาพของวิธีการ SB ผู้วิจัยจึงนำเสนอผลการวิเคราะห์ของการกำจัดสัญญาณรบกวนโดยวิธีการ SB และวิธีการกรองภาพโดยใช้คำสั่ง `ordfilt2` และ `medfilt2` ในกรณีที่สัญญาณรบกวน $(k_0, k_1) = (5, 1.25)$ บนภาพสังเคราะห์ (ภาพ Ring) และภาพจริง (ภาพ Boat) ดังแสดงในภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 ผลการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพโดยคอลัมน์ที่ 1 แสดงภาพต้นฉบับ คอลัมน์ที่ 2 แสดงภาพที่มีสัญญาณรบกวน $(k_0, k_1) = (5, 1.25)$ คอลัมน์ที่ 3 แสดงภาพผลลัพธ์จากวิธีการ SB คอลัมน์ที่ 4 แสดงภาพผลลัพธ์จากวิธีการกรองภาพด้วยคำสั่ง ordfilt2 และคอลัมน์ที่ 5 แสดงภาพผลลัพธ์จากวิธีการกรองภาพด้วยคำสั่ง medfilt2

อภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยชิ้นนี้ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีการเชิงตัวเลข คือวิธีการ SB สำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนทั้งแบบการบวกและแบบการคูณออกจากภาพในขั้นตอนเดียว ผลการทดลองเชิงตัวเลขพบว่า วิธีการ SB ที่ได้นำเสนอให้ค่าในการประเมินประสิทธิภาพของภาพผลลัพธ์ ได้แก่ ค่า PSNR และค่า SSIM ที่สูงขึ้น ในขณะที่ค่า MSE มีค่าน้อยลงเมื่อเทียบกับค่าเริ่มต้นของภาพที่มีสัญญาณรบกวน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าวิธีการ SB มีประสิทธิภาพและแม่นยำ นอกจากนี้ยังพบว่า ค่า PSNR และค่า SSIM ที่ได้จากวิธีการ SB สูงกว่าค่าที่ได้จากวิธีการกรองภาพโดยใช้คำสั่ง ordfilt2 และ medfilt2 ในขณะที่ค่า MSE ที่ได้จากวิธีการ SB ต่ำกว่าค่าที่ได้จากวิธีการกรองภาพด้วยทั้งสองคำสั่ง จึงสรุปได้ว่า วิธีการ SB มีประสิทธิภาพและแม่นยำกว่าวิธีการกรองภาพโดยใช้คำสั่ง ordfilt2 และ medfilt2 ซึ่งเป็นวิธีพื้นฐานในการซ่อมแซมภาพ

เอกสารอ้างอิง

- Chandel, R. & Gupta, G. (2013). Image filtering algorithms and techniques: a review. *IJARCSSE*, 3(10), 198-202.
- Chumchob, N., Chen, K. & Brito-Loeza, C. (2013). A new variational model for removal of combined additive and multiplicative noise and a fast algorithm for its numerical approximation. *International Journal of Computer Mathematics*, 90(1), 140–161.
- Desai, B., Kushwaha, U. & Jha, S. (2020). Image filtering – techniques, algorithm and applications. *Applied GIS*, 7(11), 970-975.
- Goldstein, T. & Osher, S. (2009). The split bregman method for l1-regularized problems. *SIAM Journal on Sciences*, 2(2), 323-343.
- Hirakawa, K. & Parks, T.W. (2006). Image denoising using total least squares. *IEEE Trans*, 15(9), 2730–2746.
- Jin, Z. & Yang, X. (2010). Analysis of a new variational model for multiplicative noise removal. *J. Math. Anal. Appl*, 362, 259–268.
- Lu, W., Duan, J., Qiu, Z., Pan, Z., Lim, R.W. & Bai, L. (2016). Implementation of high-order variational models made easy for image processing. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 4208-4233.
- Lukin, V.V., Fevrale, D.V., Ponomarenko, N.N., Abramov, S.K., Pogrebnyak, O., Egiazarian, K.O. & Astola, J.T. (2010). Discrete cosine transform-based local adaptive filtering of images corrupted by nonstationary noise. *J. Electron. Imaging*, 19(2), 023007.
- Rudin, L., Osher, S. & Fatemi, E. (1992). Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60, 259–268.
- Sagheer, S.V.M & George, S.N. (2020). A review on medical image denoising algorithms. *Biomed. Signal Process. Control*, 61, 1-19.
- Zhu, Y. & Huang, C. (2012). An improved median filtering algorithm for image noise reduction. *Phys. Procedia*, 25, 609-616.