



ผลของการสวมหน้ากากอนามัยที่มีต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลในกรุงเทพมหานคร

The Effect of Mask-Wearing on the SEIR Mathematical Model of Influenza with Seasons in Bangkok

จตุรรัตน์ โพธิ์หลวง และ ณัฐกาญจน์ นำพันธุ์วิวัฒน์*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์
ในพระบรมราชูปถัมภ์ จังหวัดปทุมธานี ปทุมธานี 13180

Jutarat Pholuang and Nattakarn Numpanviwat*

Applied Mathematics Program, Faculty of Science and Technology, Valaya Alongkorn Rajabhat University
under the Royal Patronage Pathum Thani Province, Pathum Thani 13180

*Corresponding author: nattakarn.num@vru.ac.th

Received: 8 March 2024 / Revised: 13 May 2024/ Accepted: 16 May 2024

บทคัดย่อ

โรคไข้หวัดใหญ่เป็นการติดเชื้อไวรัสในระบบทางเดินหายใจอย่างเฉียบพลัน เชื้อไข้หวัดใหญ่สามารถแพร่กระจายได้อย่างรวดเร็วในพื้นที่ที่มีคนอยู่อย่างหนาแน่น โดยเชื้อไวรัสจะปนเปื้อนอยู่ในอากาศเมื่อผู้ป่วยไอหรือจาม งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ในกรุงเทพมหานคร และเปรียบเทียบผลของการสวมหน้ากากอนามัยที่มีต่อการแพร่ระบาดตามฤดูกาล ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้คือตัวแบบ SEIR จากผลการศึกษาพบว่า เมื่ออัตราการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่ (ϕ) เพิ่มขึ้น ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) จะลดลง โดยเฉพาะเมื่ออัตราการสัมผัสเชื้อสูงหรือฤดูกาลที่มีการแพร่ระบาดของโรคสูง ได้แก่ ฤดูฝนและฤดูหนาว จะได้ค่า $R_0 > 1$ แสดงว่า มีการระบาดของโรคเกิดขึ้น การสวมหน้ากากอนามัยเพิ่มขึ้นจะทำให้จำนวนประชากรของกลุ่มติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ (I) ลดลงอย่างมีนัยสำคัญจนเข้าสู่จุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค และเมื่ออัตราการสัมผัสเชื้อต่ำหรือฤดูกาลที่มีการแพร่ระบาดของโรคต่ำ ได้แก่ ฤดูร้อน จะได้ค่า $R_0 < 1$ แสดงว่า ไม่มีการระบาดของโรคเกิดขึ้น การสวมหน้ากากอนามัยจึงไม่ส่งผลต่อการป้องกันของโรคไข้หวัดใหญ่

คำสำคัญ: โรคไข้หวัดใหญ่ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การสวมหน้ากากอนามัย ฤดูกาลเกิดโรค ค่าระดับการติดเชื้อ



Abstract

Influenza is an acute respiratory infection caused by influenza viruses. Influenza can spread easily, with rapid transmission in crowded areas. When an infected person coughs or sneezes, droplets containing viruses are dispersed into the air. The objective of this research was to develop and analyze the stability of the mathematical model of influenza in Bangkok and compare the effect of mask-wearing for the transmission of disease with seasons. The mathematical model used in this research was the SEIR model. The results showed that when the mask-wearing rate (ϕ) increased, the basic reproduction number (R_0) decreased. Especially, when the transmission rate was high or in the rainy and winter seasons, then $R_0 > 1$ where the outbreak of the disease occurred. The increasing of mask-wearing rate would reduce the number of the infected individual (I) significantly. In addition, when the transmission rate was low or in the summer season, then $R_0 < 1$ where there was no outbreak of the disease occurred. The mask-wearing rate would not affect the spreading of the disease.

Keywords: Influenza, Mathematical model, Mask-wearing, Seasonal epidemics, Basic reproduction number

บทนำ

โรคไข้หวัดใหญ่ (Influenza: flu) เป็นการติดเชื้อไวรัสในระบบทางเดินหายใจอย่างเฉียบพลัน ลักษณะอาการที่สำคัญคือ มีไข้สูง ปวดศีรษะ ปวดเมื่อยกล้ามเนื้อ และอ่อนเพลีย เชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ติดต่อทางการหายใจ โดยจะได้รับเชื้อที่ออกมาปนเปื้อนอยู่ในอากาศเมื่อผู้ป่วยไอ จาม หรือพูดในพื้นที่ที่มีคนอยู่รวมกันหนาแน่น นอกจากนี้การแพร่เชื้ออาจเกิดได้โดยการสัมผัสฝอยละอองน้ำมูก น้ำลายของผู้ป่วย จากมือที่สัมผัสกับพื้นผิวที่มีเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่แล้วใช้มือมาสัมผัสที่จมูกและปาก โดยเชื้อไข้หวัดใหญ่มีระยะฟักตัวประมาณ 1 - 3 วัน โดยผู้ป่วยสามารถแพร่เชื้อได้ตั้งแต่ 1 วันก่อนมีอาการและจะแพร่เชื้อต่อไปอีก 3 - 5 วัน หลังจากมีอาการ สำหรับเด็กอาจแพร่เชื้อได้นานกว่า 7 วัน ส่วนใหญ่จะมีการระบาดในช่วงฤดูหนาวของทุกปีและพบผู้ป่วยโรคนี้ได้ตลอดทั้งปี [1] ซึ่งคนทั่วไปอาจคิดว่า โรคไข้หวัดใหญ่เป็นโรคที่ไม่อันตราย แต่ในความเป็นจริงแล้ว โรคไข้หวัดใหญ่อาจทำให้เกิดอาการแทรกซ้อนภายหลังการติดเชื้อจนถึงขั้นเสียชีวิตได้

องค์การอนามัยโลก (World Health Organization: WHO) พบว่า ในแต่ละปีจะมีผู้ป่วยโรคไข้หวัดใหญ่ทั่วโลกประมาณ 1,000 ล้านคน ในจำนวนนี้มีผู้ป่วยขั้นรุนแรงประมาณ 3 - 5 ล้านคน และเสียชีวิตประมาณ 290,000 - 650,000 คน และร้อยละ 99 ของผู้เสียชีวิตเป็นเด็กอายุต่ำกว่า 5 ปี [2] ซึ่งสถานการณ์ของโรคไข้หวัดใหญ่ในประเทศไทย พ.ศ. 2566 พบว่า มีรายงานผู้ป่วย 472,222 คน อัตราป่วย 713.63 ต่อประชากรแสนคน และมีผู้เสียชีวิต 29 ราย โดยกลุ่มเสี่ยงต่อการเกิดโรคไข้หวัดใหญ่พบในเด็กอายุต่ำกว่า 5 ปี ด้วยอัตรา 2,461.74 ต่อประชากรแสนคน ส่วนใหญ่มีสาเหตุมาจากเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ชนิด A สำหรับกรุงเทพมหานคร มีอัตราป่วย 1,344.60 ต่อประชากรแสนคน สูงสุดเป็นอันดับที่ 4 ของประเทศ [3]

จากข้อมูลดังกล่าวข้างต้นจึงมีนักวิจัยเป็นจำนวนมากที่ทำการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ โดยอาศัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical model) มาเป็นตัวแทนสถานการณ์ที่ต้องการหาคำตอบ ซึ่งเขียนในรูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้เกิดความเข้าใจสถานการณ์และสามารถทำนายพฤติกรรมของสถานการณ์นั้น ๆ ได้ [4] เช่น ในปี พ.ศ. 2559 มาลี ศรีพรหม และคณะ [5] ได้สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ในจังหวัดสกลนคร โดยพิจารณาผลกระทบจากปริมาณน้ำฝน ซึ่งพบว่า ปริมาณน้ำฝนมีความสัมพันธ์กับจำนวนผู้ป่วย ในปีต่อมา Pongsumpun [6] ได้



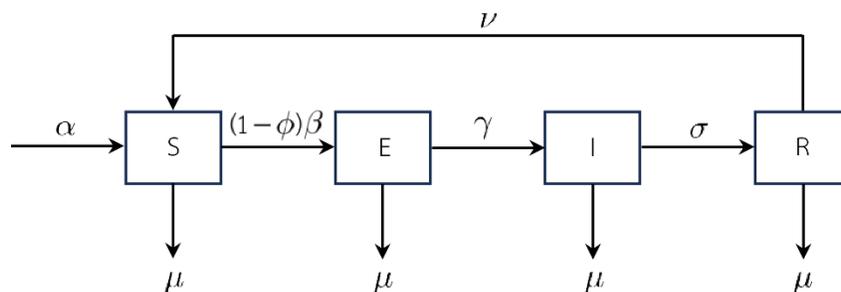
พัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาลักษณะการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ในแต่ละฤดูของประเทศไทย ซึ่งพบว่า มีการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่เพิ่มขึ้นในฤดูหนาว เนื่องจากเป็นฤดูที่มีอุณหภูมิที่เย็นกว่าและมีความชื้นต่ำ ส่งผลให้เชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่สามารถแพร่กระจายได้อย่างรวดเร็ว นอกจากนี้ ในปี พ.ศ. 2564 วัชรพงษ์ แก้วรัตน์ และอนุวัตร จิรวัดนพณิช [7] ได้ศึกษาและพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่โดยการฉีดวัคซีนในจังหวัดภูเก็ต ซึ่งพบว่า อัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่มีค่ามากขึ้น จะส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อลดลง และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อได้รับวัคซีนป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่มากขึ้น จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง และในปีต่อมา พิษขานันท์ กิณรี และคณะ [8] ได้พัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยที่มีต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่ในจังหวัดภูเก็ต ซึ่งพบว่า ผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยเป็นปัจจัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โดยถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันมาก จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง

ดังนั้น คณะผู้วิจัยจึงได้นำแนวคิดจากงานวิจัยของ Pongsumpun [6] และ พิษขานันท์ กิณรี และคณะ [8] มาพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาผลของการสวมหน้ากากอนามัยที่มีต่อการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลในกรุงเทพมหานคร ซึ่งเป็นพื้นที่ที่มาประชากรอาศัยอยู่อย่างหนาแน่น และใช้เป็นข้อมูลสำหรับการวางแผนควบคุมการแพร่ระบาดของโรคในอนาคต งานวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ในกรุงเทพมหานคร และเปรียบเทียบผลของการสวมหน้ากากอนามัยที่มีต่อการแพร่ระบาดของโรคตามฤดูกาล สำหรับใช้เป็นแนวทางในการวางแผนควบคุมการแพร่ระบาดของโรคในอนาคต

วิธีการดำเนินการวิจัย

1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

สำหรับการพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการสวมหน้ากากอนามัยที่มีต่อการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ในกรุงเทพมหานคร จะแบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (Susceptible) กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อแล้วอยู่ในระยะฟักตัวแต่ไม่แสดงอาการ (Exposed) กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ (Infected) และกลุ่มประชากรที่หายจากการติดเชื้อและมีภูมิคุ้มกัน (Recovered) ซึ่งแสดงแผนภาพความสัมพันธ์ขององค์ประกอบในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้ ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แผนภาพความสัมพันธ์ขององค์ประกอบในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

เมื่อ S แทนจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลา t ใด ๆ E แทนจำนวนประชากรที่ติดเชื้อแล้วอยู่ในระยะฟักตัวแต่ไม่แสดงอาการ ณ เวลา t ใด ๆ I แทนจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ ณ เวลา t ใด ๆ R แทนจำนวนประชากรที่หายจากการติดเชื้อและมีภูมิคุ้มกัน ณ เวลา t ใด ๆ α แทนอัตราการเกิดของประชากร μ แทนอัตราการตายของ



ประชากร ϕ แทนอัตราการสมรหน้าากอนามัย β แทนอัตราการสัมผัสเชื้อ γ แทนอัตราการฟักตัวของเชื้อ σ แทนอัตราการหายจากโรค และ ν แทนอัตราการสูญเสียภูมิคุ้มกัน

จากภาพที่ 1 สามารถอธิบายได้ด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นที่ (1) ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \alpha N - \frac{(1-\phi)\beta SI}{N} + \nu R - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{(1-\phi)\beta SI}{N} - \gamma E - \mu E \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma E - \sigma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \sigma I - \nu R - \mu R\end{aligned}\quad (1)$$

โดยที่ N แทนผลรวมของประชากร ณ เวลา t ใด ๆ ซึ่ง $N = S + E + I + R$ เมื่อกำหนดให้ $\bar{S} = \frac{S}{N}$, $\bar{E} = \frac{E}{N}$,

$\bar{I} = \frac{I}{N}$ และ $\bar{R} = \frac{R}{N}$ จะสามารถจัดรูประบบสมการที่ (1) ได้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{S}}{dt} &= \alpha - (1-\phi)\beta\bar{S}\bar{I} + \nu\bar{R} - \alpha\bar{S} \\ \frac{d\bar{E}}{dt} &= (1-\phi)\beta\bar{S}\bar{I} - \gamma\bar{E} - \alpha\bar{E} \\ \frac{d\bar{I}}{dt} &= \gamma\bar{E} - \sigma\bar{I} - \alpha\bar{I} \\ \frac{d\bar{R}}{dt} &= \sigma\bar{I} - \nu\bar{R} - \alpha\bar{R}\end{aligned}\quad (2)$$

2. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นการวิเคราะห์ด้วยวิธีมาตรฐาน โดยการหาจุดสมดุล (Equilibrium point) การหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic reproduction number) และการวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (Local asymptotically stable) ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. การหาจุดสมดุลสามารถหาได้จากการกำหนดสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นในระบบสมการที่ (2) ให้เท่ากับ 0 นั่นคือ $\frac{d\bar{S}}{dt} = 0$, $\frac{d\bar{E}}{dt} = 0$, $\frac{d\bar{I}}{dt} = 0$ และ $\frac{d\bar{R}}{dt} = 0$ ทำให้ได้ค่า ณ จุดสมดุลที่ไม่มีการแพร่ระบาดของโรค (Disease-free equilibrium point: DFE) คือ $E_0 = (\bar{S}^0, \bar{E}^0, \bar{I}^0, \bar{R}^0)$ และค่า ณ จุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค (Endemic equilibrium: EE) คือ $E_1 = (\bar{S}^*, \bar{E}^*, \bar{I}^*, \bar{R}^*)$

2. การหาค่าระดับการติดเชื้อ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของผู้ป่วยในรุ่นที่ 2 ที่ติดเชื้อจากผู้ป่วยที่ติดเชื้อในรุ่นแรก 1 คน เขียนแทนด้วย R_0 จะใช้วิธีรุ่นถัดไป (Next generation method) [9] โดยการจัดรูประบบสมการที่ (2) ให้อยู่ในรูป $\frac{dx_i}{dt} = F_i(x) - V_i(x)$ โดยที่ $F_i(x) = \left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial x_i} \right]$ และ $V_i(x) = \left[\frac{\partial V_i(E_0)}{\partial x_i} \right]$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, 4$ ซึ่งจะได้ค่าระดับการติดเชื้อ $R_0 = \rho(FV^{-1})$ เมื่อ ρ คือ ค่ารัศมีสเปกตรัม สำหรับกรณี $R_0 > 1$ แสดงว่า โรคมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic) กรณี $R_0 = 1$ แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic) และกรณี $R_0 < 1$ แสดงว่า โรคไม่มีการระบาด

3. การวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ เป็นการหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue: λ) เพื่ออธิบายคำตอบของสมการเกี่ยวกับค่าความสมดุล ซึ่งมี 2 กรณี ดังนี้



3.1 เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีการแพร่ระบาดของโรค เป็นการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะจากสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) $\det(J_0 - \lambda I) = 0$ เมื่อ J_0 คือ จาโคเบียนเมทริกซ์ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีการแพร่ระบาดของโรค โดยกำหนดว่า λ ทุกค่าจะต้องมีส่วนจริงเป็นลบ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของเรอ์-เฮอริวิทซ์ (Routh-Hurwitz) [10] ส่งผลให้ค่า $R_0 < 1$

3.2 เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ ณ จุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค เป็นการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะจากสมการลักษณะเฉพาะ $\det(J_1 - \lambda I) = 0$ ซึ่ง J_1 คือ จาโคเบียนเมทริกซ์ ณ จุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค โดยกำหนดว่า λ ทุกค่าจะต้องมีส่วนจริงเป็นลบ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของเรอ์-เฮอริวิทซ์ ส่งผลให้ค่า $R_0 > 1$

3. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นการพิจารณาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมจากการสำรวจข้อมูลในงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ณ จุดสมดุลที่ไม่มีการแพร่ระบาดของโรคและจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค ที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ และนำค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องไปคำนวณหาค่าตอบเชิงตัวเลขจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์

ผลการวิจัย

1. ผลการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

จากการกำหนดสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นในระบบสมการที่ (2) ให้เท่ากับ 0 ทำให้ได้ค่า ณ จุดสมดุลที่ไม่มีการแพร่ระบาดของโรค คือ $E_0 = (1, 0, 0, 0)$ และค่า ณ จุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค คือ $E_1 = (\bar{S}^*, \bar{E}^*, \bar{T}^*, \bar{R}^*)$ โดยที่ $\bar{S}^* = \frac{1}{R_0}$, $\bar{E}^* = \frac{(\alpha + \sigma)\bar{T}^*}{\gamma}$, $\bar{T}^* = \frac{(R_0 - 1)(\alpha + \gamma)(\alpha + \sigma)(\alpha + \nu)}{(1 - \phi)\beta[(\alpha + \gamma)(\alpha + \sigma + \nu) + \nu\sigma]}$ และ $\bar{R}^* = \frac{\sigma\bar{T}^*}{\alpha + \nu}$ เมื่อ $R_0 = \frac{(1 - \phi)\beta\gamma}{(\alpha + \gamma)(\alpha + \sigma)}$

1. ณ จุดสมดุลที่ไม่มีการแพร่ระบาดของโรค เมื่อพิจารณาสมการลักษณะเฉพาะ $\det(J_0 - \lambda I) = 0$ โดยที่

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & \nu \\ 0 & -\alpha - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\alpha - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\alpha - \nu \end{bmatrix}$$

จะได้ค่าลักษณะเฉพาะ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีการแพร่ระบาดของโรค คือ $\lambda_1 = -\alpha$, $\lambda_2 = -\alpha - \gamma$, $\lambda_3 = -\alpha - \nu$ และ $\lambda_4 = -\alpha - \sigma$ จะเห็นได้ว่า ค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นลบ สอดคล้องกับเงื่อนไขของเรอ์-เฮอริวิทซ์

ดังนั้น ณ จุดสมดุลที่ไม่มีการแพร่ระบาดของโรคจะมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ เมื่อ $R_0 < 1$

2. ณ จุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค จะเห็นว่า จุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรคมีความสัมพันธ์กับค่าระดับการติดเชื้อ และ $\bar{E}^* > 0$, $\bar{T}^* > 0$ และ $\bar{R}^* > 0$ เมื่อ $R_0 > 1$ นั่นคือ จุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรคมีค่าเป็นบวก เมื่อ $R_0 > 1$

เมื่อทำการหาผลรวมของประชากรในระบบสมการที่ (1) จะได้ $\frac{dN}{dt} = (\alpha - \mu)N$ นั่นคือ $N(t) = N(0)e^{(\alpha - \mu)t}$ เนื่องจาก $N = S + E + I + R$ จะได้ว่า $\bar{S} + \bar{E} + \bar{T} + \bar{R} = 1$ หรือ $\bar{R} = 1 - \bar{S} - \bar{E} - \bar{T}$ ดังนั้น จึงสามารถลดรูประบบสมการที่ (2) ให้อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้



$$\begin{aligned}\frac{d\bar{S}}{dt} &= \alpha - (1-\phi)\beta\bar{S}\bar{T} - \alpha\bar{S} + \nu(1-\bar{S}-\bar{E}-\bar{T}) \\ \frac{d\bar{E}}{dt} &= (1-\phi)\beta\bar{S}\bar{T} - \gamma\bar{E} - \alpha\bar{E} \\ \frac{d\bar{T}}{dt} &= \gamma\bar{E} - \sigma\bar{T} - \alpha\bar{T}\end{aligned}\quad (3)$$

เมื่อพิจารณาสมการลักษณะเฉพาะ $\det(J_1 - \lambda I) = 0$ โดยที่

$$J_1 = \begin{bmatrix} -(1-\phi)\beta\bar{T}^* - (\alpha + \nu) & -\nu & -(1-\phi)\beta\bar{S}^* - \nu \\ (1-\phi)\beta\bar{T}^* & -(\alpha + \gamma) & (1-\phi)\beta\bar{S}^* \\ 0 & \gamma & -(\alpha + \sigma) \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\bar{S}^* = \frac{(\alpha + \gamma)(\alpha + \sigma)}{(1-\phi)\beta\gamma}$ และ $\bar{T}^* = \frac{(R_0 - 1)(\alpha + \gamma)(\alpha + \sigma)(\alpha + \nu)}{(1-\phi)\beta[(\alpha + \gamma)(\alpha + \sigma + \nu) + \nu\sigma]}$ จะได้

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{(1-R_0)a_1a_2a_3}{a_1(a_2 + \nu) + \nu\sigma} - a_3 & -\nu & \frac{-a_1a_2}{\gamma} - \nu \\ \frac{(R_0 - 1)a_1a_2a_3}{a_1(a_2 + \nu) + \nu\sigma} & -a_1 & \frac{a_1a_2}{\gamma} \\ 0 & \gamma & -a_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $a_1 = \alpha + \gamma$, $a_2 = \alpha + \sigma$ และ $a_3 = \alpha + \nu$ จะได้สมการลักษณะเฉพาะ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีการแพร่ระบาดของโรค คือ $\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$

$$\text{โดยที่ } A = (a_1 + a_2 + a_3) + \frac{a_1a_2a_3(R_0 - 1)}{a_1(a_2 + \nu) + \nu\sigma}$$

$$B = (a_1 + a_2)a_3 + \frac{a_1a_2a_3(a_1 + a_2 + \nu)(R_0 - 1)}{a_1(a_2 + \nu) + \nu\sigma}$$

$$\text{และ } C = \frac{a_1a_2a_3[(a_1 + \nu)a_2 + \gamma\nu](R_0 - 1)}{a_1(a_2 + \nu) + \nu\sigma}$$

จะเห็นว่า $A > 0$, $B > 0$ และ $C > 0$ เมื่อ $R_0 > 1$ นอกจากนี้ จะได้ว่า $AB > C$ เมื่อ $R_0 > 1$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของเรย์-เฮอริทซ์ ดังนั้น ณ จุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรคจะมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ เมื่อ $R_0 > 1$

2. ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

คณะผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการสวมหน้ากากอนามัยที่มีต่อการแพร่ระบาดของโรคใช้หัดใหญ่ในกรุงเทพมหานคร โดยค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับโรคใช้หัดใหญ่ แสดงได้ดังตารางที่ 1



ตารางที่ 1 ค่าของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับโรคไข้หวัดใหญ่

พารามิเตอร์	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย	อ้างอิง
อัตราการเกิดของประชากร	α	$\frac{1.037 \times 10^{-2}}{365}$	ต่อวัน	[11]
อัตราการตายของประชากร	μ	$\frac{8.990 \times 10^{-3}}{365}$	ต่อวัน	[11]
อัตราการสมาน้ำากอนามัย	ϕ	0-1		
อัตราการสัมผัสเชื้อ	β	0.1, 0.3, 0.6	ต่อวัน	[6]
อัตราการฟักตัวของเชื้อ	γ	0.994	ต่อวัน	[12]
อัตราการหายจากโรค	σ	0.067	ต่อวัน	[6]
อัตราการสูญเสียภูมิคุ้มกัน	ν	0.033	ต่อวัน	[6]

คณะผู้วิจัยได้นำค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับโรคไข้หวัดใหญ่ตามตารางที่ 1 มาวิเคราะห์ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) เมื่ออัตราการสมาน้ำากอนามัย (ϕ) ซึ่งหมายถึง ร้อยละของประชากรในกลุ่ม S และ I ที่สมาน้ำากอนามัย มีค่าเป็น 0.2, 0.4, 0.6 และ 0.8 ตามลำดับ โดยมีอัตราการสัมผัสเชื้อ (β) ต่างกันตามฤดูกาล สอดคล้องกับงานวิจัยของ Pongsumpun [6] ซึ่งแสดงได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) เมื่ออัตราการสมาน้ำากอนามัย (ϕ) มีค่าเป็น 0.2, 0.4, 0.6 และ 0.8 ตามลำดับ และอัตราการสัมผัสเชื้อ (β) ต่างกันตามฤดูกาล

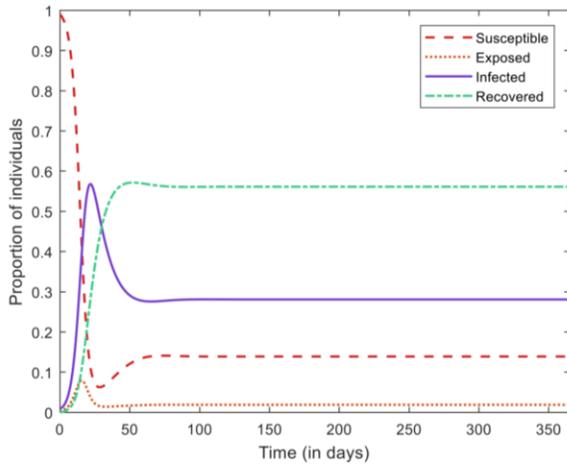
ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0)	อัตราการสมาน้ำากอนามัย			
	$\phi = 0.2$	$\phi = 0.4$	$\phi = 0.6$	$\phi = 0.8$
ฤดูร้อน ($\beta = 0.1$)	1.200	0.900	0.600	0.300
ฤดูฝน ($\beta = 0.3$)	3.598	2.699	1.799	0.900
ฤดูหนาว ($\beta = 0.6$)	7.197	5.398	3.598	1.799

จากตารางที่ 2 พบว่า ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) จะลดลงเมื่ออัตราการสมาน้ำากอนามัย (ϕ) เพิ่มขึ้นในทุกฤดูกาล นอกจากนี้เมื่ออัตราการสัมผัสเชื้อมีค่าเป็น 0.3 ($\beta = 0.3$) และอัตราการสมาน้ำากอนามัยมีค่าเป็น 0.8 ($\phi = 0.8$) ค่าระดับการติดเชื้อจะมีค่าน้อยกว่า 1 ($R_0 < 1$) แสดงว่า ไม่มีการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ ทำนองเดียวกับกรณีอัตราการสัมผัสเชื้อมีค่าเป็น 0.1 ($\beta = 0.1$) และอัตราการสมาน้ำากอนามัยมีค่าเป็น 0.4, 0.6 และ 0.8 ($\phi = 0.4, 0.6, 0.8$) ตามลำดับ

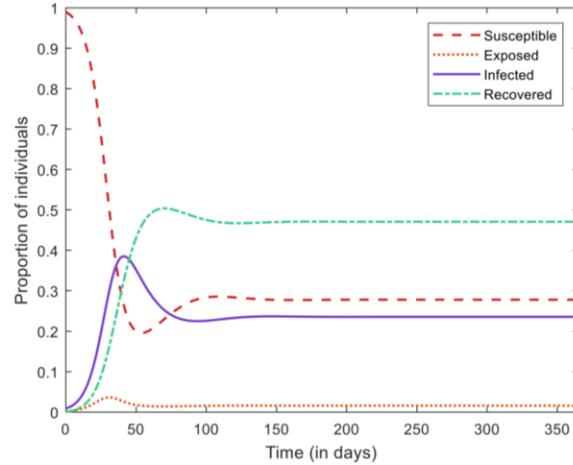
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ ณ จุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรคที่อัตราการสมาน้ำากอนามัยมีค่าเป็น 0.2 ($\phi = 0.2$) โดยกำหนดให้ค่าเริ่มต้นของประชากรแต่ละกลุ่ม คือ $(\bar{S}_0, \bar{E}_0, \bar{I}_0, \bar{R}_0) = (0.99, 0, 0.01, 0)$ จะพบว่า เมื่ออัตราการสัมผัสเชื้อมีค่าเป็น 0.3 และ 0.6 ($\beta = 0.3, 0.6$) ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (\bar{S}) มีแนวโน้มลดลงจนเข้าสู่จุดสมดุล ในขณะที่ประชากรที่ติดเชื้อแล้วอยู่ในระยะฟักตัวแต่ไม่แสดงอาการ (\bar{E}) และประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ (\bar{I}) จะเพิ่มขึ้นจนถึงจุดหนึ่งและลดลงจนเข้าสู่จุดสมดุล สำหรับประชากรหายจากการติดเชื้อและมีภูมิคุ้มกัน (\bar{R}) จะเพิ่มขึ้นจนเข้าสู่จุดสมดุล โดยจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค คือ (0.139, 0.019, 0.281, 0.561) เมื่ออัตราการสัมผัสเชื้อมีค่าเป็น 0.6 ($\beta = 0.6$) และจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค คือ (0.278, 0.016, 0.236, 0.471) เมื่ออัตราการสัมผัสเชื้อมีค่าเป็น 0.3



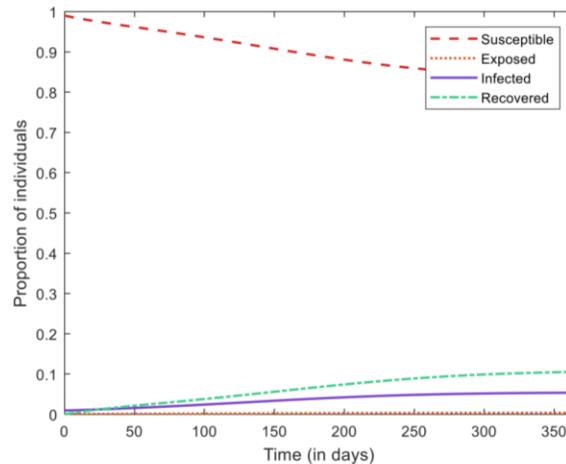
($\beta = 0.3$) ดังแสดงในภาพที่ 2(ก) และภาพที่ 2(ข) ตามลำดับ สำหรับจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรคเมื่ออัตราการสัมผัสเชื้อมีค่าเป็น 0.1 ($\beta = 0.1$) นั้น จะพบว่า ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (\bar{S}) จะลดลงจนถึงจุดหนึ่งแล้วเข้าสู่จุดสมดุล ในขณะที่ประชากรของกลุ่มอื่น ๆ (\bar{E} , \bar{I} , \bar{R}) จะเพิ่มขึ้นจนถึงจุดหนึ่งแล้วเข้าสู่จุดสมดุล ดังแสดงในภาพที่ 2(ค) โดยจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค คือ (0.838, 0.004, 0.054, 0.105)



(ก) อัตราการสัมผัสเชื้อมีค่าเป็น 0.6 ($\beta = 0.6$)



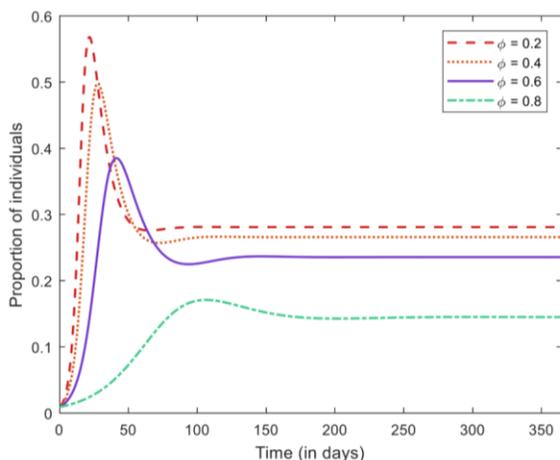
(ข) อัตราการสัมผัสเชื้อมีค่าเป็น 0.3 ($\beta = 0.3$)



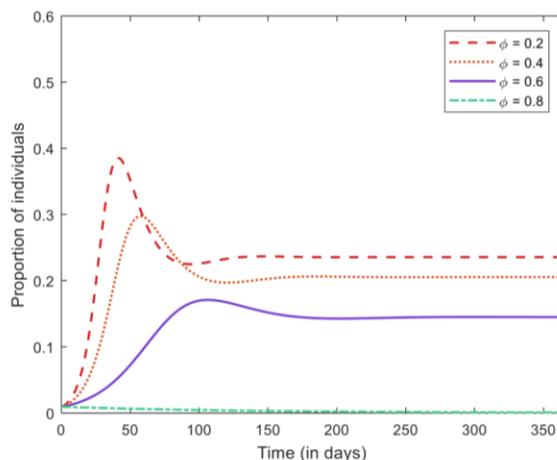
(ค) อัตราการสัมผัสเชื้อมีค่าเป็น 0.1 ($\beta = 0.1$)

ภาพที่ 2 การเปลี่ยนแปลงของประชากรแต่ละกลุ่ม เมื่ออัตราการสวมหน้ากากอนามัยมีค่าเป็น 0.2 ($\phi = 0.2$)

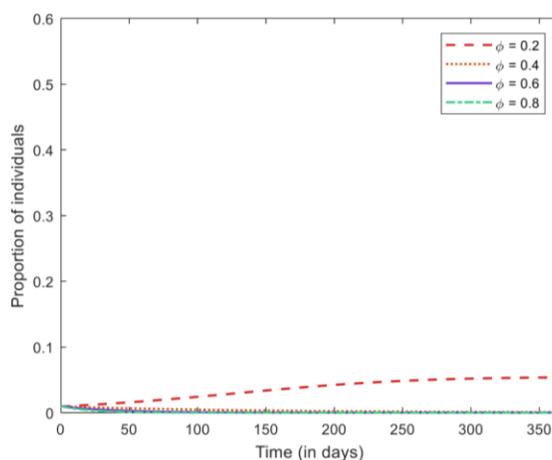
นอกจากนี้คณะผู้วิจัยได้ทำการเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงของประชากรของกลุ่มติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ (\bar{I}) เมื่ออัตราการสวมหน้ากากอนามัย (ϕ) มีค่าเป็น 0.2, 0.4, 0.6 และ 0.8 ตามลำดับ โดยมีอัตราการสัมผัสเชื้อ (β) ต่างกันตามฤดูกาล ดังแสดงในภาพที่ 3



(ก) อัตราการสัมผัสเชื้อมีค่าเป็น 0.6 ($\beta = 0.6$)



(ข) อัตราการสัมผัสเชื้อมีค่าเป็น 0.3 ($\beta = 0.3$)



(ค) อัตราการสัมผัสเชื้อมีค่าเป็น 0.1 ($\beta = 0.1$)

ภาพที่ 3 การเปลี่ยนแปลงของประชากรของกลุ่มติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ (T) เมื่ออัตราการสวมหน้ากากอนามัย (ϕ) มีค่าเป็น 0.2, 0.4, 0.6 และ 0.8 ตามลำดับ

จากภาพที่ 3 จะเห็นว่า ประชากรของกลุ่มติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ (T) จะลดลงอย่างมีนัยสำคัญ เมื่อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่เพิ่มขึ้น ดังแสดงในภาพที่ 3(ก) และภาพที่ 3(ข) แต่เมื่อมีอัตราการสัมผัสเชื้อต่ำ ดังแสดงในภาพที่ 3(ค) จะพบว่า การสวมหน้ากากอนามัยจะไม่ส่งผลต่อการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่

อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาและวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ในกรุงเทพมหานคร และเปรียบเทียบผลของการสวมหน้ากากอนามัยที่มีต่อการแพร่ระบาดตามฤดูกาล ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ คือ ตัวแบบ SEIR ซึ่งประกอบไปด้วยกลุ่มของประชากร 4 กลุ่ม ได้แก่ ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) ประชากรที่ติดเชื้อแล้วอยู่ใน



ระยะฟักตัวแต่ไม่แสดงอาการ (E) ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ (I) และประชากรหายจากการติดเชื้อและมีภูมิคุ้มกัน (R) โดยผู้วิจัยได้พัฒนาตัวแบบมาจากงานวิจัยของวัชรพงษ์ แก้วรัตน์ และอนุวัตร จิรวัดนพานิข [7] และพิชานันท์ กิณีรี และคณะ [8]

จากผลการศึกษาพบว่า เมื่ออัตราการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันโรคใช้หวัดใหญ่ (ϕ) เพิ่มขึ้น ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) จะลดลง โดยเฉพาะเมื่ออัตราการสัมผัสเชื้อสูงในช่วงฤดูฝนและฤดูหนาว จะได้ค่า $R_0 > 1$ แสดงว่า มีการระบาดของโรคเกิดขึ้น นอกจากนี้เมื่ออัตราการสวมหน้ากากอนามัยเพิ่มขึ้น จะทำให้ประชากรของกลุ่มติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ (I) ลดลงอย่างมีนัยสำคัญจนเข้าสู่จุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของพิชานันท์ กิณีรี และคณะ [8] และเมื่ออัตราการสัมผัสเชื้อต่ำในช่วงฤดูร้อน จะได้ค่า $R_0 < 1$ แสดงว่า ไม่มีการระบาดของโรคเกิดขึ้น ทำให้การสวมหน้ากากอนามัยจึงไม่ส่งผลต่อการป้องกันของโรคใช้หวัดใหญ่ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของณัฐเสน คงเสน และคณะ [13] ที่พบว่า ฤดูกาลเกิดโรคมีผลต่อการแพร่ระบาดของเชื้อไวรัส RSV ซึ่งเป็นโรคติดเชื้อในระบบทางเดินหายใจเช่นเดียวกับโรคใช้หวัดใหญ่

ดังนั้น ฤดูกาลที่มีอัตราการสัมผัสเชื้อสูง ได้แก่ ฤดูฝนและฤดูหนาว หน่วยงานภาครัฐที่เกี่ยวข้องจึงควรมีระบบเฝ้าระวังการแพร่ระบาดของโรคใช้หวัดใหญ่ที่มีประสิทธิภาพ เช่น การฉีดวัคซีนป้องกันโรคใช้หวัดใหญ่ การรณรงค์ให้ความรู้เกี่ยวกับการรักษาสุขภาพอนามัย รวมถึงกระตุ้นให้มีการสวมหน้ากากอนามัยเมื่ออยู่ในพื้นที่แออัด เนื่องจากโรคใช้หวัดใหญ่เป็นโรคที่สำคัญที่สุดโรคหนึ่งในกลุ่มโรคติดเชื้ออุบัติใหม่และโรคติดเชื้ออุบัติซ้ำ มีการระบาดทั่วโลกหลายครั้ง แต่แต่ละครั้งเกิดขึ้นอย่างกว้างขวาง ทำให้มีผู้ป่วยและผู้เสียชีวิตเป็นจำนวนมาก

เอกสารอ้างอิง

1. กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. แผนปฏิบัติการเตรียมความพร้อมรับการระบาดของโรคใช้หวัดใหญ่ สายพันธุ์ใหม่ พ.ศ. 2564 - 2566. พิมพ์ครั้งที่ 1. นนทบุรี: กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข; 2564.
2. WHO. Influenza (Seasonal). [Internet]. 2023 [cited 2023 Nov 30]. Available from: [https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/influenza-\(seasonal\)](https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/influenza-(seasonal))
3. กองระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค. รายงานสถานการณ์โรคใช้หวัดใหญ่ ประเทศไทย พ.ศ. 2566. [อินเทอร์เน็ต]. 2566 [เข้าถึงเมื่อ 20 ม.ค. 2567]. เข้าถึงได้จาก: https://ddc.moph.go.th/uploads/ckeditor2//files/DOE_flu_52.2566.pdf
4. รัชญา วิริยะพงศ์. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น. พิมพ์ครั้งที่ 1. พิษณุโลก: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร; 2564.
5. มาลี ศรีพรหม, ณัฐกร จันทร์ชัย, เจษฎา กลยนิษฐ์, ฤทธิเดช อินอุเทน, ตระกูลไทย ฉายแมน. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคใช้หวัดใหญ่ โดยพิจารณาผลกระทบจากปริมาณน้ำฝน. SNRUJST 2016;8:233-9.
6. Pongsumpun P. Mathematical model of influenza with seasons in Thailand. In: proceedings of the 6th Burapha University International Conference 2017, August 3-4, 2017; Chonburi, Thailand; 2017. p. 494-502.
7. วัชรพงษ์ แก้วรัตน์, อนุวัตร จิรวัดนพานิข. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคใช้หวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต. ใน: เอกสารประกอบการประชุมวิชาการเสนอผลงานวิจัยระดับชาติและนานาชาติ พ.ศ. 2564 ครั้งที่ 2 วันที่ 20 มีนาคม 2564. มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา. กรุงเทพฯ; 2564. หน้า B430-45.
8. พิชานันท์ กิณีรี, อนุรักษ์ วีระประเสริฐสกุล, เจษฎา สุจริตธรรการ, อนุวัตร จิรวัดนพานิข. ผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคใช้หวัดใหญ่ กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต. ใน: เอกสารประกอบการประชุมมหาดใหญ่



วิชาการระดับชาติและนานาชาติ ครั้งที่ 13 วันที่ 12 พฤษภาคม 2565. มหาวิทยาลัยหาดใหญ่. สงขลา; 2565. หน้า 623-36.

9. Den Driessche PV, Watmough J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Math Biosci* 2002;180:29-48.
10. Willems JL. *Stability theory of dynamical systems*. New York: Wiley Interscience Division; 1970.
11. สำนักบริหารการทะเบียน. สถิติประชากรทางการทะเบียนราษฎร (รายเดือน). [อินเทอร์เน็ต]. 2566 [เข้าถึงเมื่อ 20 ม.ค. 2567]. เข้าถึงได้จาก: <https://stat.bora.dopa.go.th/stat/statnew/statMONTH/statmonth/#/mainpage>
12. Goswami NK, Shanmukha. A mathematical model of influenza: stability and treatment. in: proceedings of the international conference on mathematical modeling and simulation, August 31, 2016; Varanasi, India; 2016. p. 4898-935
13. ณัฐเสน คงเสน, วรณภา หมวมณี, อัญชุลี ณ ตะกั่วทุ่ง, เกตุกนก หนูดี, กัญยากร อ่อนรักษ์. ผลของฤดูกาลเกิดโรคที่มีต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคติดเชื้อไวรัส RSV. *Life Sci Environ J* 2023;24:226-38.