



ความหนืดของกลีเซอรินตามกฎของสโตกส์และสมการลันเดา-ลิฟชิตซ์ที่ทดสอบ  
ด้วยการทดลองการสั่นแบบฮาร์โมนิกที่หน่วงต่ำ

The Viscosity of Glycerin Based on Stokes's Law and the Landau-Lifshitz  
Equation Tested with the Underdamped Harmonic Oscillation Experiment

อนันต์ อาแว<sup>1</sup> ปรัชญา ตั้งจิตสมบุญ<sup>2</sup> จามร วสุรัตน์มณี<sup>1</sup> พินธุติฐ์ กลิ่นขจร<sup>1\*</sup>

เกวลี นิลกำแหง<sup>3</sup> และ ดุสิต งามรุ่งโรจน์<sup>1</sup>

<sup>1</sup>วิทยาลัยเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ กรุงเทพฯ 10800

<sup>2</sup>ภาควิชาการศึกษาทั่วไป คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสุขภาพ มหาวิทยาลัยนวมินทราธิราช กรุงเทพฯ 10300

<sup>3</sup>ศูนย์วิศวกรรมและเทคโนโลยีนิวเคลียร์ชั้นสูง ฝ่ายนิวเคลียร์ฟิวชันและพลาสมา

สถาบันเทคโนโลยีนิวเคลียร์แห่งชาติ (องค์การมหาชน) กรุงเทพฯ 10900

Anan Awa<sup>1</sup>, Prajya Tangjitsomboon<sup>2</sup>, Jamon Wasuratmanee<sup>1</sup>, Pinthudit Klinkajorn<sup>1\*</sup>,  
Kewalee Nilgumhangand<sup>3</sup> and Dusit Ngamrunroj<sup>1</sup>

<sup>1</sup>College of Industrial Technology, King Mongkut's University of Technology North, Bangkok 10800

<sup>2</sup>Department of General Education, Faculty of Science and Health Technology, Navamindradhiraj  
University, Bangkok 10300

<sup>3</sup>Advanced Engineering and Nuclear Technology Center, Nuclear Fusion and Plasma Section, Thailand  
Institute of Nuclear Technology (Public Organization), Bangkok 10900

\*Corresponding author: Pinthudit.k@cit.kmutnb.ac.th

Received: 30 July 2025/ Revised: 16 October 2025/ Accepted: 20 October 2025

## บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ศึกษาค่าความหนืดระหว่างแบบจำลองสมการลันเดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz) และกฎของสโตกส์ โดยการสั่นแบบฮาร์โมนิกที่หน่วงต่ำโดยเก็บข้อมูลการเคลื่อนที่ของลูกเหล็กแล้วประมวลผลด้วยโปรแกรม tracker เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทาน ( $\gamma$ ) ความถี่เชิงมุมของการสั่น ( $\omega$ ) เปรียบเทียบค่าความหนืดจากเครื่องวัดความหนืดผลการทดลองพบว่าค่า  $\gamma$  และค่าความหนืดเพิ่มขึ้นตามความเข้มข้นของกลีเซอรินแต่ค่า  $\omega$  ลดลง ค่าความหนืดจากสมการของลันเดา-ลิฟชิตซ์มีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากเครื่องมือวัดโดยกฎของสโตกส์สามารถใช้สำหรับอธิบายค่าความหนืดในขณะที่ความเร็วคงที่ ซึ่งแตกต่างจากสมการแบบจำลองลันเดา-ลิฟชิตซ์ที่มีการพิจารณาผลของวัตถุที่ความเร็วไม่คงที่ เมื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่า  $\gamma$  กับค่าความหนืด พบว่ามีแนวโน้มเพิ่มขึ้นตามระยะยัดของสปริง ที่ระยะยัดของสปริงเท่ากับ 2 cm มีการส่ายบนระนาบน้อยที่สุดและมีค่าความหนืดใกล้เคียงกับเครื่องมือวัด แต่ที่กลีเซอรินความเข้มข้น 70% โดยปริมาตรมีค่าที่แตกต่างเทียบกับเครื่องมือวัดมากกว่า 70 % โดยหนึ่งในสาเหตุเกิดจากการที่ของเหลวเกาะที่ผิววัตถุส่งผลทำให้มวลโดยรวมของวัตถุมี



การเปลี่ยนแปลงส่งผลต่อการคำนวณหาค่าความหนืด จึงได้ข้อสรุปว่าที่ระยะยืดของสปริงเท่ากับ 2 cm และความเข้มข้น 10% 30% และ 50% ที่คำนวณด้วยสมการแบบจำลองลันเดา-ลิฟชิตซ์ค่าความหนืดจากการทดลองสอดคล้องกับเครื่องมือวัดซึ่งเหมาะสำหรับการพัฒนาการเรียนการสอนในชั้นเรียน

**คำสำคัญ:** กลีเซอริน, แบบจำลองสมการลันเดา-ลิฟชิตซ์, กฎของสโตกส์, ค่าความหนืด, ฮาร์มอนิกที่หน่วงต่ำ

### Abstract

This research aimed to study the viscosity between the Landau-Lifshitz equation model and Stokes' law by underdamped harmonic oscillation. The data of the steel ball's movement is collected and processed by tracker program to find the resistance coefficient ( $\gamma$ ) and the angular velocity of the vibration ( $\omega$ ). Comparison of viscosity values from viscosity meter. The results showed that  $\gamma$  and the viscosity value increased with the concentration of glycerin, but the  $\omega$  value decreased. The viscosity values from the Landau-Lifshitz equation are close to the values obtained from the instrument. The Stokes' law can be used to describe the viscosity values while constant velocity, unlike the Landau-Lifshitz model equations which consider the effect of objects at non-constant velocity. When studying the relationship between the value of  $\gamma$  and viscosity, it was found that the tendency increased with the length of spring extension. At the stretch distance of 2 cm, there was less in-plane oscillation. Hence, the viscosity at the stretch distance of 2 cm close to the measured instrument, but at 70% glycerin concentration, the value was more than 70% different from the measured instrument. However, at 70% glycerin concentration, the value is more than 70% different from the measurement device. One of the reasons is that at high concentrations, some of the glycerin is attached to the object's surface. Therefore, it was concluded that the stretch distance of 2 cm and the concentration of 10%, 30%, and 50%, the experimental viscosity was consistent with the measuring instruments which are suitable for developing classroom teaching.

**Keywords:** Glycerin, Landau-lifshitz model equation, Stokes' law, Viscosity, Underdamped harmonic oscillation

### บทนำ

การเรียนเนื้อหาเกี่ยวกับของไหลทั้งในระดับมัธยมศึกษาและระดับปริญญาตรีได้มีการสอนและการทดลองเรื่องความหนืดซึ่งทำการศึกษาภายใต้แรงต้านในของเหลว ในระดับมัธยมศึกษาได้คำนวณหาค่าความหนืดด้วยกฎของสโตกส์ (Stoke's law) [1] โดยพิจารณาจากการปล่อยลูกเหล็กลงสู่ของเหลวโดยทำการบันทึกผลการทดลองในช่วงที่ลูกเหล็กมีอัตราเร็วคงที่ซึ่งลูกเหล็กต้องเคลื่อนที่ในหลอดบรรจุของเหลวที่มีความยาวมาก [2, 3] อย่างไรก็ตามนอกจากการทดลองปล่อยลูกเหล็กเพื่อหาค่าความหนืด ได้มีอีกวิธีที่สามารถหาค่าความหนืด นั่นคือ การพิจารณาสมการการสั่นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายภายใต้แรงหนืดที่กระทำกับวัตถุซึ่งอยู่ในเนื้อหาระดับปริญญาตรี โดยการสันดั่งกล่าวไม่จำเป็นต้องใช้ระยะในการสั่นที่มาก [4, 5] ซึ่งเป็นจุดที่แตกต่างกับการทดลองหาค่าความหนืดในการเรียนการสอนตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาถึงระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 ที่ส่วนใหญ่ทำการปล่อยลูกเหล็กด้วยข้อจำกัดของอุปกรณ์ทดลองที่ไม่สามารถหาภาชนะบรรจุของเหลวที่มีความยาวมากๆ ได้ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเสนอแนวทางปรับปรุงการหาค่าความหนืดด้วยวิธีการสั่นภายใต้แรงหนืดเพื่อตัดข้อจำกัดระยะทางในการเคลื่อนที่ของลูกเหล็กตามกฎของสโตกส์

การศึกษาหาค่าความหนืดมีความสำคัญอย่างยิ่งต่องานด้านต่างๆ เช่น ด้านอุตสาหกรรมยานยนต์ อาหาร ยา และอื่นๆ ดังนั้น จึงมีการพัฒนาเครื่องมือทดลองจนวิธีการในการหาค่าดังกล่าว ในงานวิจัยนี้ทำการวิจัยพัฒนาการเรียนการสอน

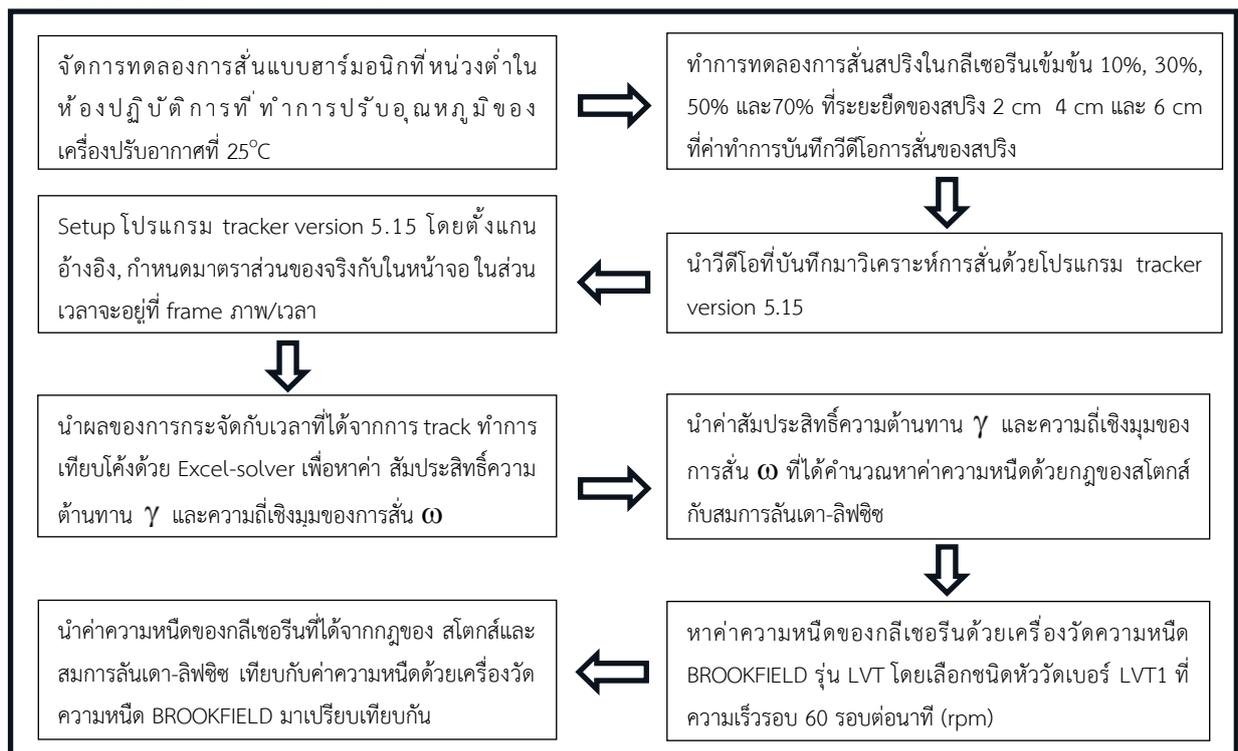


ในห้องปฏิบัติการ โดยเลือกหัวข้อการศึกษาหาค่าความหนืดของกลีเซอริน ที่มีความเข้มข้นที่แตกต่างกัน ซึ่งการวิจัยเชิงการศึกษานี้ได้มีวิธีการเก็บข้อมูลแบบต่างๆ ได้แก่ การปล่อยลูกเหล็กทรงกลมรัศมีต่างกันลงในของเหลวโดยมีเซนเซอร์ตรวจจับรังสีอินฟราเรดที่ควบคุมด้วยไมโครคอนโทรลเลอร์ Arduino [3] และการใช้กล้องดิจิทัลถ่ายภาพติดตาม (Track) การเคลื่อนที่ของลูกเหล็กในของเหลวและดึงข้อมูลความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางที่เคลื่อนที่ได้กับเวลา [5-7] นอกเหนือจากการหาค่าความหนืดด้วยการปล่อยลูกเหล็กลงในของเหลวแล้ว ได้มีวิธีการทดลองโดยให้วัตถุเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกแบบหน่วงปกติ (Under damped Oscillation) ในของเหลว ได้แก่ การปล่อยลูกเหล็กให้เคลื่อนที่แบบเพนดูลัมในน้ำและใช้กล้องดิจิทัลติดตามภาพ [8] และมีการทดลองการสั่นของลูกเหล็กติดสปริงในของเหลว [9,10] และนอกจากนี้ได้มีการทดลองเปรียบเทียบหาค่าความหนืดด้วยวิธีปล่อยลูกเหล็กและการสั่น พบว่าค่าที่ได้มีความแตกต่างกันไม่เกิน 5% [11] อย่างไรก็ตามการทดลองหาค่าความหนืดในงานวิจัยที่ผ่านมาได้ใช้กฎของสโตกส์เหมาะสำหรับการเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีความเร็วคงที่ในของไหลซึ่งทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนได้ ดังนั้น จึงมีการวิจัยที่น่าสนใจการของแรงต้านที่ใช้กับการเคลื่อนที่แบบมีความเร่งซึ่งเรียกว่าสมการแบบจำลองลันดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz) จากผลการวิจัยพบว่าผลที่ได้สอดคล้องกับค่าจริง [8]

จากการทบทวนวรรณกรรมที่ผ่านมาพบว่า การพัฒนาวิธีการหาค่าความหนืดจึงมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการปรับปรุงแนวทางการเรียนการสอนในห้องปฏิบัติการทั้งในระดับมัธยมศึกษา และระดับปริญญาตรี ทำให้นักเรียนนักศึกษาได้เห็นผลจากการทดลองว่าสอดคล้องกับทฤษฎีอย่างไร และได้เห็นถึงลักษณะของการเคลื่อนที่กับการคำนวณค่าความหนืดที่ได้จากการทดลอง ดังนั้น คณะผู้วิจัยจึงสนใจการหาค่าความหนืดเดิมนิยมใช้วิธีการปล่อยลูกเหล็กคำนวณตามกฎของสโตกส์ ปกติใช้ในการทดลองหาค่าความหนืดทั้งในระดับมัธยมศึกษาและระดับปริญญาตรี เป็นการทดลองโดยการสั่นของสปริงภายใต้แรงหนืดจากของเหลวจะเปรียบเทียบการคำนวณตามกฎของสโตกส์เทียบกับสมการแบบจำลอง ลันดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz) ของเหลวที่ใช้จะใช้กลีเซอริน โดยใช้การถ่ายวิดีโอการเคลื่อนที่ด้วยกล้องถ่ายภาพแบบดิจิทัล แล้วใช้โปรแกรม tracker version 5.15 [12] สำหรับการสั่นของมวลติดปลายสปริงในของเหลวแบบฮาร์มอนิกที่หน่วงต่ำซึ่งใช้สมการกฎของสโตกส์เปรียบเทียบกับสมการแบบจำลองลันดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz) ภายใต้ของเหลวกลีเซอรินที่มีความเข้มข้นแตกต่างกันและทำการเปรียบเทียบค่าความหนืดกับเครื่องวัดความหนืดมาตรฐาน (BROOKFIELD รุ่น LVT)

**วิธีดำเนินการวิจัย**

ขั้นตอนในการวิจัยแสดงตามแผนผังดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย



งานวิจัยนี้ใช้กลีเซอรินที่มีมวลโมเลกุล 92.1 g/mol มีจุดเดือด 290°C และจุดหลอมเหลว 18°C ดังภาพที่ 2 ในทดลองหาความหนืดของกลีเซอรินจะมีอัตราส่วนปริมาตรกลีเซอรินต่อปริมาตรน้ำที่ 10%, 30%, 50% และ 70%



ภาพที่ 2 กลีเซอริน (กลีเซอรอล) ที่ใช้ในการทดลอง มีสูตรทางเคมี  $C_3H_8O_3$

ในงานวิจัยนี้ได้คำนวณหาค่าความหนืดตามกฎของสโตกส์ (โดยเครื่องหมายลบแสดงถึงแรงต้านหรือมีทิศตรงข้ามกับทิศการเคลื่อนที่ของลูกเหล็ก) ซึ่งแสดงในสมการที่ 1 เปรียบเทียบกับสมการแบบจำลองลันเดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz) [8, 13] ที่ปรับปรุงจากกฎของสโตกส์ซึ่งแสดงดังสมการที่ 2 (โดยเครื่องหมายลบแสดงถึงแรงต้านหรือมีทิศตรงข้ามกับทิศการเคลื่อนที่ของลูกเหล็ก)

$$F_D = -6\pi\eta r v \quad (1)$$

$$F_D = -\left[6\pi\eta r \left(1 + \frac{r}{8}\right) v + 3\pi r^2 \left(1 + \frac{2r}{9\delta}\right) \rho \delta \frac{dv}{dt}\right] \quad (2)$$

กำหนดให้

$$\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho\omega}} \quad (3)$$

$F_D$  คือ แรงต้านการเคลื่อนที่ (Drag Force ; N)

$\eta$  คือ ค่าความหนืดของของไหล (mPa.s)

$r$  คือ รัศมีของลูกเหล็กทรงกลม (m)

$\rho$  คือ ความหนาแน่นของของไหล ( $kg/m^3$ )

$v$  คือ ความเร็วของลูกเหล็กทรงกลมที่เคลื่อนที่ในของไหล(m/s)

$\omega$  คือ ความถี่เชิงมุมของการสั่น (rad/s)

$\delta$  คือ ความลึกการแทรกซึมเป็นค่าประมาณความหนาของชั้นขอบเขตรอบทรงกลม (m)

อุปกรณ์ของงานวิจัยนี้ประกอบด้วย สปริงที่มีค่าคงที่ของสปริง 5 N/m มวล 15.79 g โดยแขวนสปริงไว้ในแนวตั้งโดยที่ปลายสปริงติดวัตถุทรงกลมมวล 67.90 g ซึ่งมีรัศมี 1.27 cm โดยการทดลองนี้ทำการสั่นสปริงที่ระยะยืดสปริงเท่ากับ 2 cm, 4 cm และ 6 cm การสั่นดังกล่าวเป็นการสั่นแบบฮาร์มอนิกหน่วงปกติภายใต้แรงหนืดที่อธิบายได้ด้วยสมการแบบจำลองลันเดา-ลิฟชิตซ์ เมื่อนำแรงต้านเนื่องจากของเหลวซึ่งแสดงดังสมการที่ 2 และ 3 แทนลงในสมการกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันสำหรับวัตถุทรงกลมมวล  $m$  ที่ติดกับปลายสปริงซึ่งให้มวลดังกล่าวเคลื่อนที่แบบสั่นในแนวตั้งพบว่า แรงที่กระทำต่อมวล (แสดงดังภาพที่ 3) และสมการการเคลื่อนที่ที่สามารถแสดงได้ดังนี้

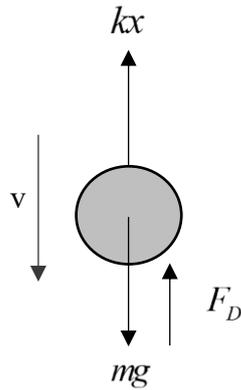
$$m \frac{dv}{dt} = mg - kx + F_D \quad (4)$$

จากสมการที่ (4) สามารถหาผลเฉลยของการสั่นตามเงื่อนไขกฎของสโตกส์คือ

$$X = x - \frac{g}{\omega^2} = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$$

โดย

$$\gamma = \frac{3\pi\eta r}{m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \gamma^2$$



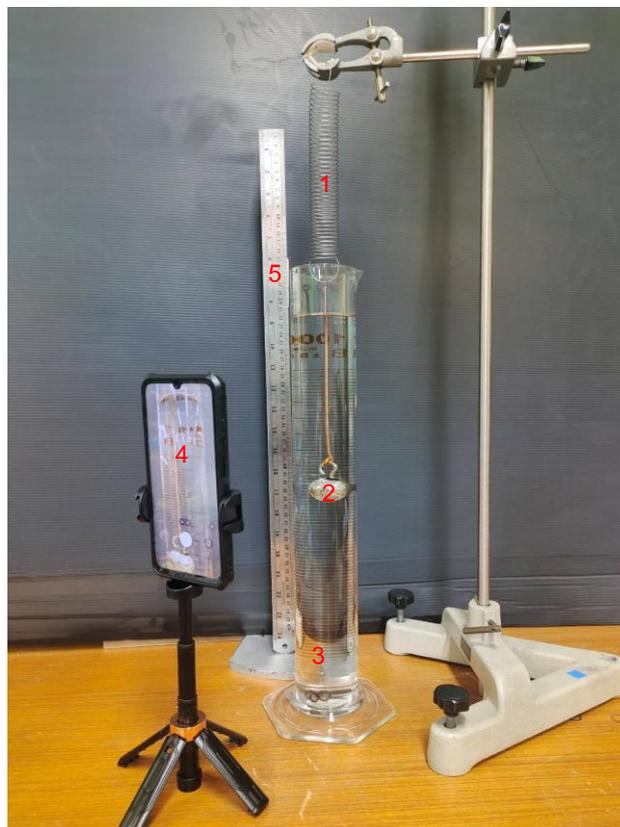
ภาพที่ 3 แรงที่กระทำต่อมวลขณะสั้นในกลีเซอริน

และสมการที่ (4) สามารถหาผลเฉลยของการสั้นตามแบบจำลองลันดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz) คือ

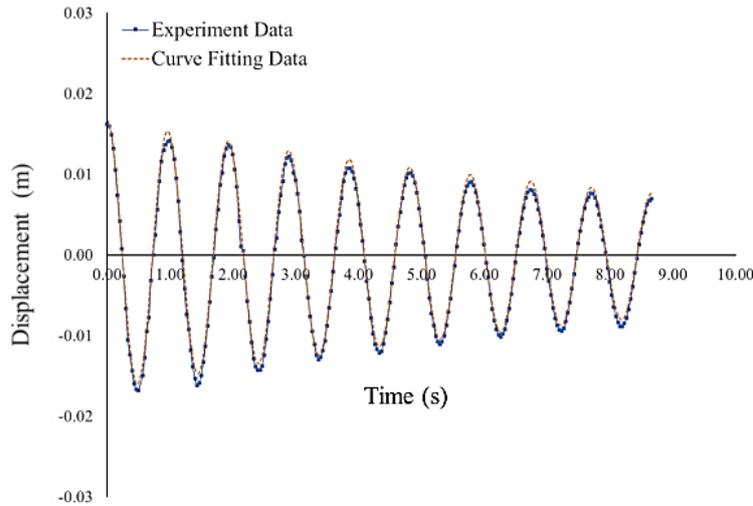
$$X = x - \frac{mg}{(m + 3\pi r^2(1 + \frac{2r}{9\delta})\rho\delta)} = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) \tag{5}$$

$$\gamma = \frac{3\pi\eta r(1 + \frac{r}{\delta})}{(m + 3\pi r^2(1 + \frac{2r}{9\delta})\rho\delta)}, \omega^2 = \frac{k}{(m + 3\pi r^2(1 + \frac{2r}{9\delta})\rho\delta)} - \gamma^2 \tag{6}$$

การเก็บข้อมูลการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกของลูกเหล็กสามารถเก็บข้อมูลด้วยการบันทึกภาพเคลื่อนไหวจากกล้องวิดีโอ ภาพที่ได้ดังกล่าวถูกประมวลผลด้วยโปรแกรม tracker V5.1.5 การติดตั้งอุปกรณ์ดังกล่าวได้แสดงดังภาพที่ 4



ภาพที่ 4 การจัดอุปกรณ์ในการทดลอง 1. สปริง 2. ลูกเหล็ก 3. กลีเซอริน 4. กล้องถ่ายภาพ 5. ไม้บรรทัด



ภาพที่ 5 ผลที่เกิดจากการปรับเส้นโค้งเพื่อหาค่า  $\gamma$  และ  $\omega$  ที่แสดงดังสมการที่ (5)

การบันทึกภาพเคลื่อนไหวเพื่อใช้โปรแกรม tracker เพื่อหาค่าการกระจัดกับเวลาของการสั่นของสปริงในกลีเซอรินจำเป็นจะต้องมีระยะเวลาความยาวจริงอ้างอิง ในการจัดทดลองจะใช้ไม้บรรทัดที่มีความละเอียดสุดของเครื่องมือ 1 มิลลิเมตร และเวลาจะขึ้นอยู่กับอัตราเร็วการบันทึกภาพของกล้องวิดีโอที่ใช้ในงานวิจัยนี้จะมีอัตราการบันทึกภาพของกล้องวิดีโอที่ 30 FPS (เฟรมต่อวินาที) จะได้ระยะเวลาต่อภาพที่ 33 ms/F (มิลลิวินาทีต่อภาพ) จากใช้โปรแกรม tracker จะได้ค่าการกระจัดกับเวลาของการสั่นของสปริงในสารละลายกลีเซอรินและนำผลการกระจัดกับเวลาที่ได้จากโปรแกรม tracker ปรับเส้นโค้ง (Curve Fitting) กับผลเฉลี่ยของสมการที่ (4) ด้วยโปรแกรม Excel-solver (ภาพที่ 5) เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทาน  $\gamma$  และความถี่เชิงมุมของการสั่น  $\omega$  ตามสมการที่ (3) และนำค่า  $\gamma$  และ  $\omega$  หาได้แทนลงในสมการที่ (5) เพื่อหาค่าความหนืดของของไหล ในการทดลองหาความหนืดการติดตั้งการทดลองแสดงดังภาพที่ 4 และค่าความหนืดที่ได้ถูกแสดงในหัวข้อผลการทดลองการเก็บข้อมูลจากผลการทดลองได้ทำการทดลองซ้ำจำนวน 5 ครั้ง นำมาหาค่าเฉลี่ยและหาความคลาดเคลื่อนจากการหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation, S.D.)

### ผลการวิจัย

การทดลองหาค่าความหนืดในการสั่นของวัตถุทรงกลมติดปลายสปริงโดยผลการทดลองที่ได้ถูกนำไปเทียบกับสมการที่ (3) ที่ปรับเส้นโค้งเพื่อหาค่าความถี่เชิงมุมของการสั่น  $\omega$  ดังตารางที่ 1 และ ค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทาน  $\gamma$  โดยผลดังกล่าวแสดงดังตารางที่ 2 และกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะยึดกับ  $\gamma$  กับกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะยึดกับ  $\omega$  แสดงดังภาพที่ 6 จากผลการทดลองพบว่าค่า  $\gamma$  มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นตามความเข้มข้นของกลีเซอรินที่เพิ่มขึ้นแต่ค่าความถี่เชิงมุมของการสั่นมีแนวโน้มลดลงซึ่งผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าความเข้มข้นของกลีเซอรินส่งผลต่อการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยทำให้วัตถุเคลื่อนที่ได้ช้าลงเมื่อความเข้มข้นเพิ่มขึ้น

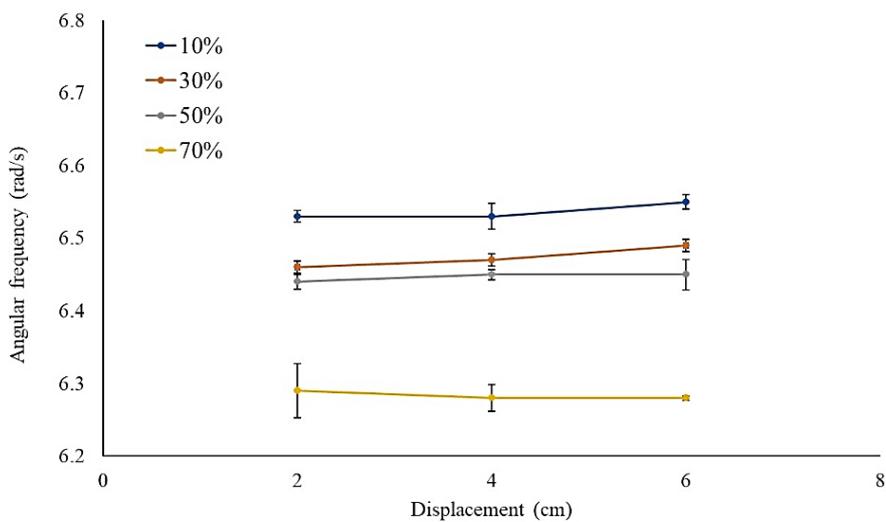
ตารางที่ 1 แสดงค่าความถี่เชิงมุมของการสั่นที่ความเข้มข้นและระยะยึดต่างๆ (จากการปรับโค้ง)

ชนิดของของเหลว	ความถี่เชิงมุมของการสั่นที่ระยะยึดของสปริงค่าต่างๆ (rad/s)		
	2 cm	4 cm	6 cm
กลีเซอริน เข้มข้น 10%	6.53 ±0.01	6.53 ±0.02	6.55 ±0.01
กลีเซอริน เข้มข้น 30%	6.46 ±0.02	6.47 ±0.02	6.49 ±0.03
กลีเซอริน เข้มข้น 50%	6.44 ±0.01	6.45 ±0.01	6.45 ±0.03
กลีเซอริน เข้มข้น 70%	6.29 ±0.04	6.28 ±0.02	6.28 ±0.01

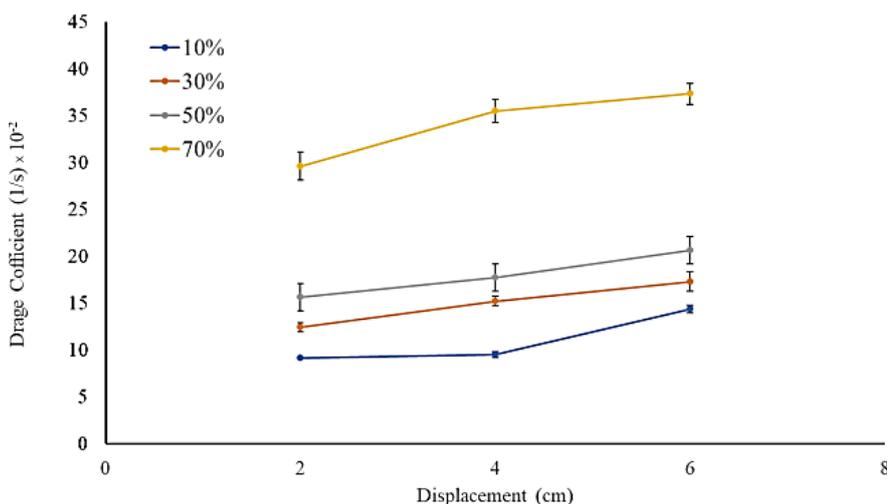


ตารางที่ 2 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทาน และระยะยืดของสปริงค่าต่างๆ

ชนิดของของเหลว	สัมประสิทธิ์ความต้านทานที่ระยะยืดของสปริงค่าต่างๆ (1/s) × 10 <sup>-2</sup>		
	2 cm	4 cm	6 cm
กลีเซอริน เข้มข้น 10%	9.12 ± 0.11	9.53 ± 0.36	14.41 ± 0.41
กลีเซอริน เข้มข้น 30%	12.43 ± 0.47	15.23 ± 0.59	17.32 ± 1.04
กลีเซอริน เข้มข้น 50%	15.63 ± 0.13	17.76 ± 0.77	20.65 ± 0.37
กลีเซอริน เข้มข้น 70%	29.60 ± 1.48	35.49 ± 1.23	37.31 ± 1.15



ภาพที่ 6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่เชิงมุมของการสั่น ω ของกลีเซอรินที่ความเข้มข้นต่างๆ กับระยะยืดของสปริง



ภาพที่ 7 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ความต้านทาน γ ของกลีเซอรินที่ความเข้มข้นต่างๆ กับระยะยืดของสปริง

จากการทดลองหาค่า γ แสดงดังตารางที่ 2 เมื่อนำค่าดังกล่าวมาคำนวณหาค่าความหนืด η ด้วยสมการของสโตกส์ กับสมการของลินดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz) แสดงค่าดังตารางที่ 3 ,ตารางที่ 4 และภาพที่ 6, ภาพที่ 7 เทียบกับการหาค่าความหนืดด้วยเครื่องวัดแสดงค่าดังตารางที่ 5 พบว่าแนวโน้มของความหนืดมีค่าเพิ่มขึ้นตามความเข้มข้นที่เพิ่มขึ้นของกลีเซอริน



พิจารณาเปรียบเทียบค่าความหนืดที่คำนวณด้วยสมการตามกฎของสโตกส์เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากสมการของลันเดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz) มีความแตกต่างกัน โดยที่การคำนวณตามสมการมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากเครื่องมือวัดความหนืดรุ่น BROOKFIELD รุ่น LVT (ในการวัดความหนืดด้วยเครื่องวัด BROOKFIELD จะเลือกหัววัดและอัตราเร็วรอบโดยจะมีตารางเฉพาะของเครื่องมือเพื่อเป็นค่าตัวคูณ(factor) ตามเบอร์หัววัดและอัตราเร็วรอบ เมื่อคูณกับค่าที่อ่านได้จากเครื่องมือจะได้ค่าความหนืดที่เท่า ๆ กันแต่จะมีความละเอียดที่ได้ต่างกัน โดยอาจพิจารณาจาก ถ้าความหนืดน้อยจะเลือก หัววัดที่เบอร์ LVT3 หรือ LVT4 และอัตราเร็วรอบต่ำ แต่ถ้าความหนืดสูงต้องเลือกหัววัดที่เบอร์ LVT1 หรือ LVT2 และอัตราเร็วรอบสูง ในการทดลองนี้ได้ทำการทดสอบที่หัววัดต่าง ๆ ให้สามารถอ่านค่าได้โดยทำการเลือกที่เหมาะสมคือในการวัดสามารถอ่านค่าสเกลได้ และหัววัดสามารถหมุนได้ โดยได้เลือกหัววัดเบอร์ LVT1 ที่อัตราเร็วรอบ 60 รอบต่อนาที ในการหาความหนืดด้วยวิธีการทดลองการสั่นในของเหลวของวัตถุที่ติดปลายสปริงจึงต้องคำนวณสมการลันเดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz) เนื่องจากการที่วัตถุเคลื่อนที่แบบมีความเร่งในของไหลสิ่งที่เกิดขึ้นคือของไหลได้มีความเร่งสัมพัทธ์เทียบกับวัตถุส่งผลต่อแรงต้านที่กระทำกับวัตถุ การคิดแรงต้านด้วยกฎของสโตกส์เพียงอย่างเดียวสมการจะขึ้นกับความเร็วยังอย่างเดียวจึงแตกต่างจากสมการลันเดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz) ที่คิดความเร่งสัมพัทธ์ที่ของไหลกระทำกับวัตถุ นั่นคือ กฎของสโตกส์สามารถใช้กับของไหลที่มีความหนาแน่นน้อยๆ เมื่อเทียบกับความหนาแน่นของวัตถุ โดยความหนาแน่นของกลีเซอรินมีค่า  $1.26 \text{ g/cm}^3$  และความหนาแน่นของเหล็กประมาณ  $7.874 \text{ g/cm}^3$  ในการทดลองหาความหนืดในชั้นเรียนด้วยวิธีการปล่อยวัตถุให้ตกอิสระในของเหลวต้องให้วัตถุมีระยะเคลื่อนที่ยาวมากหรือเคลื่อนที่ในของไหลที่มีความหนืดมากเพื่อให้ความเร่งเป็นศูนย์นำไปสู่การใช้ความเร็วสุดท้ายคำนวณหาความหนืด แต่การทดลองในชั้นเรียนด้วยข้อจำกัดเกี่ยวกับความยาวของอุปกรณ์บรรจุของเหลวดังนั้นการใช้สมการลันเดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz) จึงเป็นหนึ่งในตัวเลือกที่เหมาะสมสำหรับการคำนวณหาความหนืดด้วยวิธีการสั่นของวัตถุติดปลายสปริงที่สั่นในของไหลในชั้นเรียน เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างระยะยืดของสปริงกับค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทานกับความหนืดพบว่าระยะยืดที่เพิ่มขึ้นส่งผลต่อค่าทั้งสองที่เพิ่มขึ้น โดยจากการทดลองที่ระยะยืดน้อย ๆ ได้แก่ ระยะ 2 cm วัตถุมีการเคลื่อนที่แบบสั่นบนแกนแนวดิ่งแตกต่างจากที่ระยะยืด 4 cm และ 6 cm ที่มีการส่ายบนระนาบแนวราบทำให้มีการรบกวนการเคลื่อนที่แบบสั่นของวัตถุและมีการกระเพื่อมของผิวกลีเซอรินที่มากกว่าระยะยืดของสปริง 2 cm ทำให้ผลที่ได้จึงแตกต่างจากเครื่องมือวัดนั่นคือ ค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทานและความหนืดที่เพิ่มขึ้น ดังนั้น ที่ระยะการยืดของสปริงเท่ากับ 2 cm มีการก่อกวนการเคลื่อนที่ในแนวราบเล็กน้อยทำให้ค่าความหนืดที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าที่วัดได้จากเครื่องมือ เมื่อพิจารณาผลการทดลองการสั่นที่ความเข้มข้นของกลีเซอริน 70% พบว่าค่าความหนืดที่ได้มีค่าที่แตกต่างกับเครื่องมือวัดมากกว่า 70 % โดยหนึ่งในสาเหตุดังกล่าวเกิดจากที่ของเหลวความเข้มข้นสูงวัตถุมีการลากมวลของกลีเซอรินบางส่วนติดที่ผิววัตถุเพิ่มขึ้นทำให้ค่าความหนืดที่ได้จึงแตกต่างจากเครื่องมือวัด

ตารางที่ 3 แสดงค่าความหนืดที่คำนวณด้วยกฎของสโตกส์

ความเข้มข้นกลีเซอริน	ค่าความหนืดที่คำนวณด้วยกฎของสโตกส์ (mPa.s)		
	2 cm	4 cm	6 cm
10%	51.75±0.61	54.08±2.07	81.76±2.33
30%	70.58±2.65	86.42±3.36	98.24±5.92
50%	88.72±7.18	100.77±4.38	117.18±1.91
70%	167.91±10.68	201.34±7.00	211.63±6.50



ตารางที่ 4 แสดงค่าความหนืดที่คำนวณด้วยสมการแบบจำลองลันเดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz)

ความเข้มข้นกลีเซอริน	ค่าความหนืดที่คำนวณด้วยสมการแบบจำลองลันเดา-ลิฟชิตซ์ (Landau-Lifshitz) (mPa.s)		
	2 cm	4 cm	6 cm
10%	4.93±0.06	5.35±0.21	11.52±0.35
30%	8.58±0.34	12.47±0.53	15.73±1.05
50%	12.75±1.16	16.09±0.80	21.15±0.34
70%	40.03±2.97	55.18±2.34	60.20±2.40

ตารางที่ 5 แสดงค่าความหนืดที่วัดด้วยเครื่อง BROOKFIELD รุ่น LVT หัววัด LV1 speed 60

ความเข้มข้นกลีเซอริน	ค่าความหนืดที่วัดด้วยเครื่องBROOKFIELD (mPa.s)
10%	6.3±1.03
30%	8.3±0.24
50%	12.3±0.62
70%	25.8±3.12

### อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ทำการหาค่าความหนืดเป็นสมบัติพื้นฐานของของไหลเพื่อพัฒนาการเรียนการสอนในห้องปฏิบัติการ โดยเลือกหัวข้อการศึกษาหาค่าความหนืดของกลีเซอรินที่มีความเข้มข้นที่ 10% 30% 50% และ 70% โดยปริมาตร ด้วยวิธีการให้วัตถุทรงกลมติดสปริงเส้นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายในของไหล การเก็บข้อมูลดังกล่าวเก็บข้อมูลด้วยการบันทึกภาพจากกล้องวิดีโอซึ่งภาพการสั่นของวัตถุในของไหลและประมวลผลด้วยโปรแกรมtracker V5.1.5 นำข้อมูลไปปรับโค้งเพื่อหาค่า  $\gamma$  และ  $\omega$  โดยค่าที่ได้ถูกนำไปคำนวณหาความหนืดด้วยสมการแบบจำลองลันเดา-ลิฟชิตซ์เทียบกับกฎของสโตกส์ ผลการทดลองพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทานและความหนืดเพิ่มขึ้นแปรตามความเข้มข้นที่เพิ่มขึ้นของกลีเซอริน

เมื่อทดลองที่ระยะยึดของสปริง 6 cm ความเข้มข้นของกลีเซอริน 10% 30% 50% และ 70% โดยปริมาตร พบว่าค่าความหนืดได้มีค่าที่แตกต่างกับเครื่องมือวัดมากกว่า 70 % สาเหตุหนึ่งมาจากการส่ายบนระนาบแนวราบมีผลต่อการรบกวนการเคลื่อนที่ของวัตถุส่งผลต่อการคำนวณหาค่าความหนืด ทำให้ค่าความหนืดแตกต่างจากเครื่องมือวัด และที่ความเข้มข้นของกลีเซอริน 70% ทุกระยะยึดของสปริงที่ทดลองค่าความหนืดได้มีค่าที่แตกต่างกับเครื่องมือวัดมากกว่า 70 % เช่นกัน หนึ่งสาเหตุเกิดจากการที่ของเหลวเกาะที่ผิววัตถุทำให้มวลโดยรวมของวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงส่งผลต่อการคำนวณหาค่าความหนืด

จากการเปรียบเทียบสมการแบบจำลองลันเดา-ลิฟชิตซ์เทียบกับกฎของสโตกส์ พบว่าค่าความหนืดที่คำนวณโดยสมการแบบจำลองลันเดา-ลิฟชิตซ์ มีความใกล้เคียงกับเครื่องมือวัดความหนืดจากการหาค่าความหนืดจากกฎของสโตกส์ โดยกฎของสโตกส์สามารถใช้สำหรับอธิบายการค่าความหนืดในขณะความเร็วคงที่ แตกต่างสมการแบบจำลองลันเดา-ลิฟชิตซ์ที่มีการพิจารณาผลของวัตถุที่ความเร็วไม่คงที่ งานวิจัยนี้ทำการทดลองการสั่นของสปริงเป็นการเคลื่อนที่แบบมีความเร่ง ค่าความหนืดที่ได้จากสมการแบบจำลองลันเดา-ลิฟชิตซ์มีค่าใกล้เคียงกับเครื่องมือวัดความหนืดเมื่อเทียบกับกรณีคำนวณด้วยกฎของสโตกส์ ในงานวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่าที่ระยะยึดของสปริง 2 cm ความเข้มข้น 10% 30% และ 50% ที่คำนวณด้วยสมการแบบจำลองลันเดา-ลิฟชิตซ์ให้ค่าความหนืดที่สอดคล้องกับเครื่องมือวัดเงื่อนไขดังกล่าวเหมาะสมสำหรับการพัฒนาการเรียนการสอนในชั้นเรียน



### กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากวิทยาลัยเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือตามสัญญาเลขที่ Res CIT0540/2024

### เอกสารอ้างอิง

1. รัชดา สุขพันธ์. การเปรียบเทียบการหาความหนืดของของเหลวโดยใช้วิธีการวิเคราะห์ภาพวิดีโอดิจิทัลและวิธีการจับเวลาวิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยบูรพา. ชลบุรี; 2558.
2. Sarah H Ali, Ali Abid D Al-Zuky, Anwar H Al-Saleh, Haidar J Mohamad. Measure liquid viscosity by tracking falling ball Automatically depending on image processing algorithm. J Phys Conf Ser 2019;1294:6-20.
3. อภินิหารรัตน์ ชันแก้ว, มนูญชัย ไชยเพชร, วิรยา หลังหลี่, พิชญา ทิพย์ศรี. การวัดความเร็วปลายในการตกของโลหะทรงกลมรัศมีแตกต่างกันในกลีเซอรินโดยใช้ตัวตรวจจับเวลาที่ควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์. Wichcha J NSTRU 2022;41(2):1-15.
4. Richard MP III, Richard MP Jr. The effect of viscous drag on damped simple harmonic motion. JEI 2023; 6:1-10.
5. Poonyawatpornkul J, Wattanakasiwich P. High-speed video analysis of damped harmonic motion. Phys Educ 2013;48(6):782-9.
6. Susilawati S, Satriawan M, Rizal R, Sutarno S. Fluid experiment design using video tracker and ultrasonic sensor devices to improve understanding of viscosity concept. JPCS 2022;1521(2):22-39.
7. Kesaulya N, Amahoru AH, Hertiaivi MA. Analysis of liquid viscosity value using falling ball method using digital image technology based on long exposure feature. Edu Sciences J 2020;1:108-17.
8. Leme JC, Oliveira A. Pendulum underwater—An approach for quantifying viscosity. TPT 2017;55(9):555-7.
9. Putranta H, Wiyatmo Y, Supahar XX, Dwandaru WSB. A simple liquid density measuring instrument based on Hooke's law and hydrostatic pressure. Phys Educ J 2020;55(2):025010.
10. Mananghaya MR, Yu D. Study of underdamped oscillations of a spring-mass system via directly measured acceleration time series. Phys Educ J 2022;57(4):045009.
11. El Malki M, Bria A, Amraquib S, Bria D. A SIMPLE WAY TO MEASURE THE DYNAMIC VISCOSITY OF A FLUID. NJSV 2021;1(2):38-48.
12. Douglas B, Wolfgang C, Robert M. H. Tracker. Computer [Internet]. 2024 [cited 2024 May 15]. Available from: <https://opensourcephysics.github.io/tracker-website/>
13. Landau L.D, Lifshitz E.M, Fluid Mechanics. Oxford: Pergamon press; 6; 1987.