

การวิเคราะห์เทียบสมรรถนะการควบคุมแบบ LQR ระหว่างแบบจำลอง
ลูกตุ้มกลับหัวเชิงเส้นและแบบจำลองไม่เชิงเส้นทางเวลาไม่ต่อเนื่อง
Comparative Analysis of LQR Control Performance between Linear
and Discrete Time Nonlinear Inverted Pendulum Models

ทศพล กลิ่นสุคนธ์* ทวีเดช ศิริธนาพิพัฒน์

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กรุงเทพฯ 10900

Thosapon Krinsukont* Taweedej Sirithanapipat

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kasetsart University, Bangkok 10900

*Corresponding author Email: thosapon.k@ku.th

(Received: January 23, 2026; Revised: June 15, 2026 ; Accepted: August 10, 2026)

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้นำเสนอการวิเคราะห์และประเมินสมรรถนะของตัวควบคุมแบบ Linear Quadratic Regulator (LQR) ซึ่งสังเคราะห์จากแบบจำลองเชิงเส้น แล้วนำไปประยุกต์ใช้ในการรักษาเสถียรภาพของระบบลูกตุ้มกลับหัวบนรถขับเคลื่อนที่มีพลวัตไม่เชิงเส้นในกรอบเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง โดยมุ่งศึกษาผลกระทบของความไม่เป็นเชิงเส้นที่มีต่อความแม่นยำและความทนทานของระบบ ผ่านการจำลองเปรียบเทียบการตอบสนองระหว่างแบบจำลองเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นที่มุมเริ่มต้น 15 องศา และ 30 องศา ผลการศึกษาชี้ให้เห็นว่า ที่มุมเริ่มต้น 15 องศา การตอบสนองของทั้งสองแบบจำลองมีความสอดคล้องกัน ในขณะที่ที่มุมเริ่มต้น 30 องศา พบความแตกต่างของพฤติกรรมระบบอันเกิดจากอิทธิพลของความไม่เชิงเส้น โดยตำแหน่งของรถ, มุมของลูกตุ้ม และ ความเร็วของรถ มีความแตกต่างสูงสุดประมาณร้อยละ 25, 18 และ 14 ตามลำดับ เมื่อเทียบกับผลที่ได้จากแบบจำลองเชิงเส้น อย่างไรก็ตาม ตัวควบคุม LQR ยังสามารถรักษาเสถียรภาพของระบบและนำระบบเข้าสู่จุดสมดุลได้ ผลการศึกษานี้สะท้อนให้เห็นถึงขอบเขตความเหมาะสมของการใช้แบบจำลองเชิงเส้นเพื่อออกแบบตัวควบคุม และชี้ให้เห็นแนวทางการต่อยอดสู่การประยุกต์ใช้เทคนิคการควบคุมสมัยใหม่ในลักษณะ Data-driven หรือปัญญาประดิษฐ์ เพื่อยกระดับสมรรถนะการควบคุมให้รองรับระบบที่มีพลวัตซับซ้อนและลดความคลาดเคลื่อนระหว่างแบบจำลองกับระบบจริงได้ดียิ่งขึ้น

คำสำคัญ: ตัวควบคุมเชิงเส้นกำลังสอง, จำลองสถานการณ์ทางเวลาไม่ต่อเนื่อง, พลวัตไม่เชิงเส้น, พลวัตเชิงเส้น

ABSTRACT

This paper presents an analysis and performance evaluation of a Linear Quadratic Regulator (LQR) synthesized from a linearized model and applied to stabilize a cart-inverted pendulum system with nonlinear dynamics in a discrete-time framework. The study focuses on investigating the effects of system nonlinearities on control accuracy and robustness through simulation-based comparisons between linear and nonlinear models at initial pendulum angles of 15° and 30°. The results show that at an initial angle of 15°, the responses of both models are closely aligned. In contrast, at 30°, noticeable

discrepancies arise due to nonlinear effects, with maximum deviations of approximately 25%, 18%, and 14% observed in cart position, pendulum angle, and cart velocity, respectively, compared to the linear model. Nevertheless, the LQR controller successfully maintains system stability and drives the system toward the equilibrium point. These findings highlight the practical limitations of linearized control design when applied to highly nonlinear systems and suggest future opportunities for advanced data-driven or artificial intelligence-based controllers to further enhance performance, reduce model mismatch, and improve adaptability under complex operating conditions.

Keyword: Linear Quadratic Regulator, Discrete-time Simulation, Nonlinear Dynamics, Linear Dynamics.

1. บทนำ

ระบบลูกตุ้มกลับหัวบนรถขับเคลื่อน (Cart Inverted Pendulum) เป็นระบบทางกลที่มีความสำคัญอย่างยิ่งในสาขาวิศวกรรมระบบควบคุม เนื่องจากเป็นตัวแทนของระบบ underactuated ที่มีจำนวนตัวกระทำน้อยกว่าจำนวนระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) และมีรูปแบบเป็น open-loop unstable นอกจากนี้ ระบบยังแสดงพฤติกรรมไม่เชิงเส้นอย่างชัดเจน ซึ่งเป็นคุณลักษณะพื้นฐานของระบบขั้นสูง เช่น การทรงตัวของหุ่นยนต์คล้ายมนุษย์ การควบคุมจรวดในช่วงปล่อยตัว และระบบขนส่งแบบปรับสมดุลอัตโนมัติ ด้วยเหตุนี้ inverted pendulum จึงถูกใช้เป็นโจทย์มาตรฐาน (benchmark problem) สำหรับการประเมินสมรรถนะ ความแม่นยำ และความทนทานของอัลกอริทึมควบคุม

งานวิจัยที่ผ่านมาได้มุ่งเน้นการพัฒนาตัวควบคุมเชิงเส้นเพื่อแก้ปัญหากลการทรงตัวของระบบดังกล่าว โดยเอกสาร [1] รายงานว่าการประยุกต์ใช้ตัวควบคุม LQR และ Fuzzy LQR ที่ปรับจูนด้วยอัลกอริทึมเชิงเหมาะสมสามารถปรับปรุงสมรรถนะของระบบ ทั้งด้านเวลาเข้าสู่สมดุลและการลดการแกว่งของมุมลูกตุ้ม ขณะที่เอกสาร [2] ชี้ให้เห็นว่าระบบ inverted pendulum ที่มีความไม่เชิงเส้นและความยืดหยุ่นสูงมีความอ่อนไหวต่อการรบกวนภายนอก และสามารถเพิ่มเสถียรภาพได้ด้วยกลยุทธ์ควบคุมเชิงแอดคทีฟที่คำนึงถึงพฤติกรรมไม่เชิงเส้นของระบบ

ในบรรดาวิธีการควบคุมเชิงเส้น เทคนิค Linear Quadratic Regulator (LQR) ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลาย เนื่องจากสามารถออกแบบอัตราขยายป้อนกลับสถานะเพื่อทำให้ฟังก์ชันเป้าหมายระหว่างความคลาดเคลื่อนของสถานะและพลังงานควบคุมมีค่าน้อยที่สุด อย่างไรก็ตาม เอกสาร [3] ระบุว่าประสิทธิภาพของ LQR มีความไวต่อการเลือกเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก และการปรับค่าอย่างเหมาะสมช่วยปรับปรุงการตอบสนองชั่วคราวของระบบได้ ขณะที่เอกสาร [4] แสดงให้เห็นว่าการผสมผสาน LQR กับ reduced-order observer สามารถเพิ่มความทนทานต่อความไม่เชิงเส้นและสถานะที่ไม่สามารถวัดได้

แม้ว่าการออกแบบตัวควบคุมจากแบบจำลองเชิงเส้นจะให้ผลดีใกล้จุดสมดุล แต่ในการทำงานจริง ระบบ inverted pendulum มีพลวัตไม่เชิงเส้นที่ซับซ้อน โดยเฉพาะเมื่อมุมเบี่ยงเบนมาก ซึ่งเทอมตรีโกณมิติและแรงโคริโอลิสส่งผลต่อพฤติกรรมระบบอย่างชัดเจน เอกสาร [5] ระบุว่าความไม่เชิงเส้นและความไม่แน่นอนของพลวัตมีผลต่อสมรรถนะการควบคุม และแนวทางแบบ model-free อาจให้ความทนทานสูงกว่าวิธีเชิงเส้น

ในบริบทของการควบคุมเชิงเหมาะสมสำหรับระบบไม่เชิงเส้น เอกสาร [6] รายงานว่าอัลกอริทึม Iterative Linear Quadratic Regulator และ Differential Dynamic Programming สามารถแก้ปัญหากลการควบคุมได้อย่างมีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตาม การหาคำนวณที่สูงยังคงเป็นข้อจำกัดสำคัญสำหรับการนำไปใช้งานจริง

ขณะที่เอกสาร [7] เสนอแนวคิดการจัดการการลู่เข้าสู่สมดุของระบบย่อยในช่วงเวลาที่แตกต่างกัน ซึ่งช่วยเพิ่มเสถียรภาพของระบบโดยไม่ต้องอาศัยแบบจำลองไม่เชิงเส้นที่ซับซ้อน นอกจากนี้ เอกสาร [8] ยังยืนยันว่าการควบคุม inverted pendulum อย่างมีประสิทธิภาพจำเป็นต้องใช้ตัวควบคุมไม่เชิงเส้นในช่วง swing-up ก่อนเปลี่ยนไปใช้ตัวควบคุมเชิงเส้นในบริเวณใกล้จุดสมดุล

เมื่อพิจารณาการนำไปใช้งานจริง ระบบควบคุมมักทำงานในโดเมนเวลาไม่ต่อเนื่องเนื่องจากข้อจำกัดด้านการสุ่มสัญญาณและการคำนวณเชิงตัวเลข เอกสาร [9] แสดงให้เห็นว่าการควบคุมระบบ underactuated ที่ไม่เสถียรในโดเมนเวลาไม่ต่อเนื่องจำเป็นต้องคำนึงถึงผลกระทบจากการคำนวณเชิงพยากรณ์ โดยวิธี Discrete Model Predictive Control สามารถให้สมรรถนะและเสถียรภาพที่ดีกว่า Discrete LQR ในบางกรณี ขณะที่เอกสาร [10] ชี้ให้เห็นว่าการใช้แบบจำลองเชิงเส้นเพียงอย่างเดียวอาจไม่เพียงพอในการอธิบายพฤติกรรมจริงของระบบที่มีความไม่เชิงเส้นและความแปรผันของพารามิเตอร์สูง

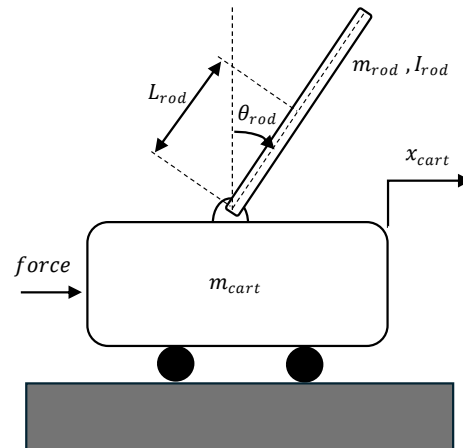
จากประเด็นดังกล่าว งานวิจัยนี้มุ่งเน้นการวิเคราะห์และประเมินขีดจำกัดของตัวควบคุม LQR ที่คำนวณจากแบบจำลองเชิงเส้น เมื่อนำไปประยุกต์ใช้กับแบบจำลองไม่เชิงเส้นในโดเมนเวลาไม่ต่อเนื่อง โดยทำการทดสอบจำลองที่มุมเริ่มต้น 15 องศา ซึ่งอยู่ในช่วงที่การประมาณเชิงเส้นยังมีความน่าเชื่อถือ และที่ 30 องศา ซึ่งความไม่เชิงเส้นเริ่มส่งผลกระทบเด่นชัด เพื่อประเมินความทนทานของค่าอัตราขยายคงที่ต่อความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองและข้อจำกัดของการคำนวณแบบไม่ต่อเนื่อง

2. ภาพรวมการวิจัย

2.1 แบบจำลองลูกตุ้มกลับหัว

ในการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบลูกตุ้มกลับหัวบนรถขับเคลื่อน (Cart Inverted Pendulum) ปรับปรุงจากหนังสือ [11] เพื่อใช้เป็นตัวแทนของระบบจริง (Plant) ในการจำลองสถานการณ์ โดยระบบประกอบด้วยรถ (Cart) ที่สามารถ

เคลื่อนที่ได้ในแนวราบและมีก้านลูกตุ้ม (Rod) ติดตั้งอยู่บนจุดหมุนที่สามารถแกว่งได้อย่างอิสระในระนาบตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบลูกตุ้มกลับหัวบนรถขับเคลื่อน

พารามิเตอร์ทางกายภาพของระบบ (Physical Parameters) คุณสมบัติทางกายภาพของแบบจำลองถูกกำหนดค่าที่สำหรับการทดลอง โดยกำหนดให้มวลของรถ (m_{cart}) มีขนาด 2 กิโลกรัม และมวลของก้านลูกตุ้ม (m_{rod}) มีขนาด 1 กิโลกรัม ก้านลูกตุ้มมีความยาวจากจุดหมุนถึงจุดศูนย์กลางมวล (L_{rod}) เท่ากับ 0.075 เมตร ซึ่งส่งผลให้ความยาวรวมของก้านลูกตุ้มเท่ากับ $2L_{rod}$ ในการคำนวณโมเมนต์ความเฉื่อยของก้านลูกตุ้ม (I_{rod}) รอบจุดหมุน ใช้สมการความสัมพันธ์ $I_{rod} = \frac{m_{rod}(2L_{rod})^2}{3}$ และกำหนดค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (g) เท่ากับ 9.81 m/s^2

กฎการควบคุมและสมการแรง Control Effort ที่ป้อนให้กับตัวรถเพื่อรักษาสสมดุลของลูกตุ้ม คำนวณจากกฎการป้อนกลับสถานะ (State Feedback) ซึ่งพิจารณาจากค่าความผิดพลาด (Error) ระหว่างค่าเป้าหมาย (Setpoint) และค่าสถานะปัจจุบัน ดังสมการที่ 1 โดยที่ $error_{rod}$ คือ ความคลาดเคลื่อนของมุมลูกตุ้ม $error_{cart}$ คือ ความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งรถ k_1, k_2 ,

k_3 และ k_4 คือ ค่าอัตราขยาย (Gain) ที่ได้จากการออกแบบตัวควบคุมเป้าหมายการควบคุมกำหนดให้ $setpoint_{rod} = 0$ (แนวตั้ง) และ $setpoint_{cart} = 0$ (จุดกึ่งกลาง)

2.2 แบบจำลองลูกตุ้มกลับหัวแบบไม่เชิงเส้นทางเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-Time Nonlinear Inverted Pendulum Model)

พฤติกรรมทางพลวัตของระบบลูกตุ้มกลับหัวบนรถขับเคลื่อน ถูกควบคุมด้วยสมการการเคลื่อนที่ (Equations of Motion) ที่มีความสัมพันธ์กันระหว่างการเคลื่อนที่ของรถและการหมุนของลูกตุ้ม ดังแสดงในสมการที่ 2 และ 3 โดยแบ่งออกเป็น 2 ส่วนสำคัญ ดังนี้

2.2.1 สมการความเร่ง

สมการความเร่งแสดงการคำนวณหาความเร่งเชิงเส้นของรถ a_{cart} และความเร่งเชิงมุมของก้านลูกตุ้ม α_{rod} ณ ขณะเวลาใดๆ สมการเหล่านี้แสดงถึงความไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinearity) ของระบบอย่างชัดเจน ผ่านพจน์ทางตรีโกณมิติ $\sin(\theta_{rod})$, $\cos(\theta_{rod})$ และพจน์ความเร็วเชิงมุมยกกำลังสอง ω_{rod}^2 ซึ่งเป็นผลมาจากแรงหนีศูนย์กลาง (Centrifugal Force) และแรงโน้มถ่วง โดยสมการทั้งสองมีความเชื่อมโยงกัน (Coupled Dynamics)

ซึ่งหมายความว่า การเคลื่อนที่ของรถจะส่งผลต่อมุมของลูกตุ้ม และในขณะเดียวกันแรงเหวี่ยงจากการแกว่งของลูกตุ้มก็จะส่งผลสะท้อนกลับมายังการเคลื่อนที่ของรถด้วย

2.2.2 สมการอัปเดตสถานะทางเวลา (Discrete-time State Update Equations)

เนื่องจากการทดลองนี้เป็นการจำลองสถานการณ์บนโดเมนเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-time Simulation) เพื่อเลียนแบบการทำงานของระบบคอมพิวเตอร์ดิจิทัล จึงได้นำความเร่งที่คำนวณได้จากสมการพลวัตมาทำการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration) ด้วยวิธีออยเลอร์ (Euler's Method) เพื่อประมาณค่าสถานะของระบบในลำดับเวลาถัดไป ($t + 1$) ดังสมการที่ 4 ถึง 7

ความเร็ว (v_{cart}, ω_{rod}) คำนวณโดยการนำความเร็วปัจจุบัน บวกด้วยผลคูณของความเร่งกับค่าความละเอียดของเวลา (*resolution*)

ตำแหน่งและมุม (x_{cart}, θ_{rod}) คำนวณโดยการนำตำแหน่งและมุมปัจจุบัน บวกด้วยผลคูณของความเร็ว (ที่ผ่านการอัปเดตแล้ว) กับค่าความละเอียดของเวลา (*resolution*) โดยกำหนดให้ค่าตัวแปร *resolution* มีค่าเท่ากับ 0.01 วินาที

$$force = (error_{rod}k_1) + \left(\frac{d}{dt}error_{rod}k_2\right) - (error_{cart}k_3) - \left(\frac{d}{dt}error_{cart}k_4\right) \quad (1)$$

$$a_{cart} = \frac{force - (m_{rod}L_{rod}\left(\frac{\omega_{rod}\pi}{180}\right)^2 \sin(\theta_{rod})) + \left(\frac{(m_{rod}L_{rod})^2 \cos(\theta_{rod}) \sin(\theta_{rod})g}{I_{rod}}\right)}{\frac{((m_{cart} + m_{rod})I_{rod}) - (m_{rod}L_{rod}\cos(\theta_{rod}))^2}{I_{rod}}} \quad (2)$$

$$\alpha_{rod} = \frac{(m_{rod}L_{rod}g \sin(\theta_{rod})) + \frac{m_{rod}L_{rod}\cos(\theta_{rod})(force - (m_{rod}L_{rod}\left(\frac{\omega_{rod}\pi}{180}\right)^2 \sin(\theta_{rod})))}{(m_{cart} + m_{rod})}}{\frac{((m_{cart} + m_{rod})I_{rod}) - (m_{rod}L_{rod}\cos(\theta_{rod}))^2}{I_{rod}}} \left(\frac{180}{\pi}\right) \quad (3)$$

$$v_{cart}(t+1) = v_{cart}(t) + (a_{cart}(t+1) * resolution) \quad (4)$$

$$x_{cart}(t+1) = x_{cart}(t) + (v_{cart}(t+1) * resolution) \quad (5)$$

$$\omega_{rod}(t+1) = \omega_{rod}(t) + (\alpha_{rod}(t+1) * resolution) \quad (6)$$

$$\theta_{rod}(t+1) = \theta_{rod}(t) + (\omega_{rod}(t+1) * resolution) \quad (7)$$

2.3 แบบจำลองลูกตุ้มกลับหัวเชิงเส้น (linear Inverted Pendulum Model)

เพื่อให้สามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีการควบคุมแบบเชิงเส้นกำลังสอง (LQR) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ จำเป็นต้องแปลงสมการพลวัตให้อยู่ในรูปแบบสมการสถานะเชิงเส้น (Linear State-Space Model) กระบวนการทำให้เป็นเชิงเส้น (Linearization) อาศัยสมมติฐานการเคลื่อนที่ภายใต้มุมเอียงขนาดเล็ก (Small-angle Approximation) ส่งผลให้สามารถจัดสมการพลวัตในรูปแบบ $\dot{x} = Ax + Bu$ ได้ดังสมการที่ 8 โดยที่ State Vector, (X) ประกอบด้วยตัวแปร 4 ตัวเรียงลำดับดังนี้ $[x_{cart}, v_{cart}, \theta_{rod}, \omega_{rod}]^T$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{cart} \\ \dot{a}_{cart} \\ \dot{\omega}_{rod} \\ \dot{\theta}_{rod} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{rod}^2 g L_{rod}^2 / (m_{cart} + m_{rod}) I_{rod} - (m_{rod} L_{rod})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (m_{cart} + m_{rod}) g m_{rod} L_{rod} / (m_{cart} + m_{rod}) I_{rod} - (m_{rod} L_{rod})^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cart} \\ v_{cart} \\ \theta_{rod} \\ \omega_{rod} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_{rod} / (m_{cart} + m_{rod}) I_{rod} - (m_{rod} L_{rod})^2 \\ 0 \\ -m_{rod} L_{rod} / (m_{cart} + m_{rod}) I_{rod} - (m_{rod} L_{rod})^2 \end{bmatrix} force \quad (8)$$

2.4 การออกแบบตัวควบคุมและการคำนวณค่าอัตราขยาย (Controller Design and Gain Calculation)

ในการสังเคราะห์ตัวควบคุมเพื่อรักษาเสถียรภาพของระบบลูกตุ้มกลับหัว ผู้วิจัยได้เลือกใช้เทคนิค Linear Quadratic Regulator (LQR) ซึ่งเป็นวิธีควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเต็ม (Full State Feedback) ที่ให้ผลตอบสนองเหมาะสมที่สุดภายใต้ดัชนีชี้วัดสมรรถนะ (Performance Index) ที่กำหนด หลักการสำคัญคือการคำนวณหาเมทริกซ์อัตราขยาย K (Gain Matrix) ที่ทำให้ Cost Function (J) มีค่าต่ำที่สุด ดังสมการที่ 9

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (9)$$

System Matrix, (A) เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×4 ดังแสดงในภาพประกอบ ซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ภายในของระบบ โดยสมาชิกในเมทริกซ์ถูกคำนวณจากพารามิเตอร์ทางกายภาพ (มวล, ความยาว, โมเมนต์ความเฉื่อย) ที่ได้นิยามไว้แล้ว

Input Matrix, (B) เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×1 ที่ระบุผลกระทบของ Control Effort (*force* หรือ u) ที่มีต่ออัตราการเปลี่ยนแปลงของสถานะความเร็วและความเร่ง แบบจำลองเชิงเส้นนี้จะถูกนำไปใช้พื้นฐานในการคำนวณหาอัตราขยายป้อนกลับ K (Feedback Gain Matrix) ในขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม LQR

โดยที่

x คือ เวกเตอร์สถานะ (State Vector) ที่บ่งบอกถึงความผิดพลาดของระบบ

u คือ สัญญาณควบคุม (Control Input) หรือแรง

Q คือ เมทริกซ์น้ำหนักความสำคัญของสถานะ (State Weighting Matrix)

R คือ เมทริกซ์น้ำหนักความสำคัญของการใช้พลังงาน (Control Weighting Matrix)

จากการนำแบบจำลองเชิงเส้น (Linear Model) ที่ได้จากหัวข้อ 2.3 มาคำนวณร่วมกับเมทริกซ์น้ำหนัก Q และ R ผ่านการแก้สมการ Algebraic Riccati Equation (ARE) ทำให้ได้ชุดค่าอัตราขยายที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการดึงระบบกลับเข้าสู่จุดสมดุล ผลลัพธ์จากการคำนวณ

ได้ค่าสัมประสิทธิ์ตัวควบคุม (k) สำหรับตัวแปรสถานะแต่ละตัว ดังนี้

$$k_1 = -31.6228, k_2 = -31.8533, \\ k_3 = -171.2982 \text{ และ } k_4 = -16.4767$$

3. ออกแบบการทดลอง

เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ในการตรวจสอบประสิทธิภาพและความทนทานของตัวควบคุม LQR ที่ออกแบบด้วยทฤษฎีเชิงเส้น ผู้วิจัยได้กำหนดระเบียบวิธีวิจัยโดยการจำลองสถานการณ์เปรียบเทียบ (Comparative Simulation) ระหว่างพฤติกรรมของแบบจำลองเชิงเส้น (Linear Model) และแบบจำลองไม่เชิงเส้น (Nonlinear Model) ภายใต้ตัวควบคุมชุดเดียวกัน โดยมีรายละเอียดขั้นตอนการทดลองดังนี้

3.1 การกำหนดค่าตัวควบคุมและแบบจำลอง

การทดลองนี้จะนำค่าอัตราขยายป้อนกลับ (Feedback Gains) $K = [k_1, k_2, k_3, k_4]$ ที่คำนวณได้จากหัวข้อที่ 2.4 ไปประยุกต์ใช้กับระบบจำลอง 2 รูปแบบ ได้แก่

ระบบเชิงเส้น (Linear System) ใช้สมการ State-space เชิงเส้น ($\dot{x} = Ax + Bu$) ซึ่งเป็นตัวแทนของทฤษฎีการออกแบบ

ระบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear System) ใช้สมการพลวัตเต็มรูป (Full Dynamics) ที่มีการคำนวณแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-time)

3.2 เงื่อนไขการทดลอง

เพื่อศึกษาผลกระทบของความไม่เชิงเส้นที่มีต่อเสถียรภาพของระบบ การทดลองถูกแบ่งออกเป็น 2 กรณีศึกษา กำหนดให้ตัวแปรสถานะเริ่มต้นอื่นๆ (ตำแหน่งของรถ, ความเร็วของรถ, ความเร็วเชิงมุม) เป็นศูนย์ทั้งหมด โดยมี "มุมเริ่มต้นของลูกตุ้ม (θ_{rod})" ที่กำหนดให้แตกต่างกัน ดังนี้

กรณีที่ 1: มุมเริ่มต้น 15 องศา (Small Initial Angle) กำหนดให้ $\theta_{rod} = 15$ วัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของตัวควบคุมในย่านการทำงานที่มุมมีความ

เบี่ยงเบนเล็กน้อย ซึ่งเป็นย่านที่สมมติฐานเชิงเส้น ($\sin(\theta_{rod}) \approx \theta_{rod}$) ยังคงมีความแม่นยำสูง

กรณีที่ 2: มุมเริ่มต้น 30 องศา (Large Initial Angle) กำหนดให้ $\theta_{rod} = 30$ วัตถุประสงค์เพื่อทดสอบขีดจำกัดความทนทาน (Robustness) ของระบบเมื่อเริ่มทำงานที่มุมกว้าง ซึ่งอิทธิพลของความไม่เชิงเส้นจะมีผลอย่างมากต่อการทรงตัว

3.3 ขั้นตอนการดำเนินงานและบันทึกผล

ในแต่ละกรณีการทดลอง จะดำเนินการจำลองเป็นระยะเวลา 5 วินาที ซึ่งเป็นช่วงเวลาที่เพียงพอสำหรับการสังเกตพฤติกรรมช่วง Transient Response และการเข้าสู่สภาวะ Steady State โดยจะทำการบันทึกค่าตัวแปรสถานะที่สำคัญเทียบกับเวลา ได้แก่ ตำแหน่งของรถ (x_{cart}), ความเร็วของรถ (v_{cart}), มุมของลูกตุ้ม (θ_{rod}), ความเร็วเชิงมุม (ω_{rod}), และ Control Effort (*force*) เพื่อนำไปวิเคราะห์เปรียบเทียบผลตอบสนองของระบบเชิงเส้นและระบบไม่เชิงเส้นต่อไป

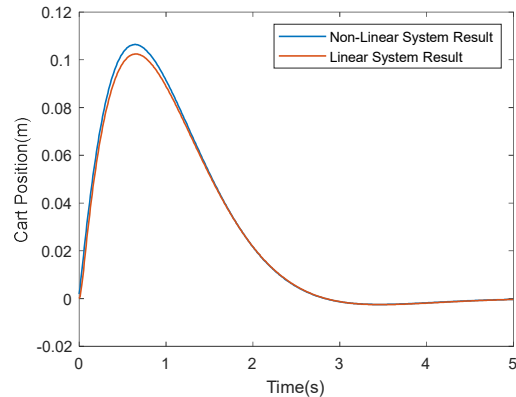
4. ผลการทดลองและอภิปรายการทดลอง

จากการจำลองสถานการณ์เพื่อตรวจสอบสมรรถนะของตัวควบคุม LQR ที่ออกแบบด้วยทฤษฎีเชิงเส้นเมื่อนำไปประยุกต์ใช้กับระบบลูกตุ้มกลับหัวที่มีพลวัตแบบไม่เชิงเส้นทางเวลาไม่ต่อเนื่อง พบว่าที่ระดับ มุมเริ่มต้น 15 องศา (รูปที่ 2 ถึง 6) ผลการตอบสนองของตัวแปรสถานะต่าง ๆ ทั้งมุมของลูกตุ้มและตำแหน่งของรถจากแบบจำลองเชิงเส้นและแบบจำลองไม่เชิงเส้นมีความสอดคล้องไปในทิศทางเดียวกันอย่างยิ่ง โดยเส้นกราฟของทั้งสองกรณีเกือบจะทับซ้อนกันสนิทตลอดช่วงเวลาการจำลอง 5 วินาที พฤติกรรมดังกล่าวบ่งชี้ว่าภายใต้ขอบเขตของมุมเอียงขนาดเล็กนี้ สมมติฐานการประมาณค่าความเป็นเชิงเส้นที่ใช้ในการสังเคราะห์ตัวควบคุมยังคงมีความแม่นยำสูง ส่งผลให้แรงควบคุมที่คำนวณได้จากกฎการป้อนกลับสถานะสามารถหักล้างแรงโน้มถ่วงและดึงระบบกลับสู่จุดสมดุลในแนวตั้งได้อย่างรวดเร็วและราบรื่นตามที่

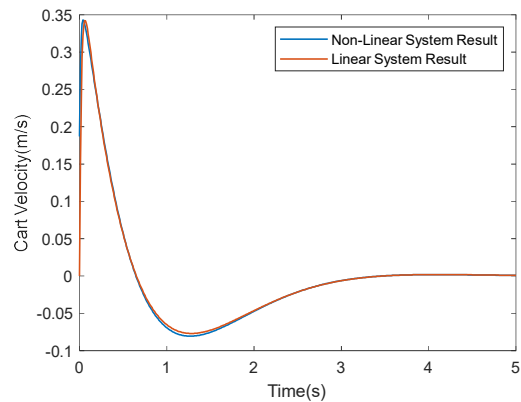
ทฤษฎีได้คาดการณ์ไว้ โดยไม่มีความคลาดเคลื่อนที่มีนัยสำคัญเกิดขึ้น

อย่างไรก็ตาม เมื่อขยายขอบเขตการทดสอบไปที่มุมเริ่มต้น 30 องศา (รูปที่ 7 ถึง 11) ซึ่งเป็นสภาวะที่เริ่มหลุดพ้นจากสมมติฐานมุมเล็ก ผลการทดลองแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างอย่างชัดเจน โดยเฉพาะเมื่อพิจารณากราฟเปรียบเทียบในด้านการเคลื่อนที่และความเร็วของรถ (Cart Dynamics) พบว่ามีความคลาดเคลื่อนทางกลศาสตร์ปรากฏขึ้น กล่าวคือ แม้ตัวควบคุมจะพยายามรักษามุมของก้านลูกตุ้มด้วยตรรกะเดียวกันกับกรณีมุมเล็ก แต่ผลลัพธ์ที่ได้จากแบบจำลองไม่เชิงเส้นกลับแสดงพฤติกรรมเคลื่อนที่ที่แตกต่างจากแบบจำลองเชิงเส้นอย่างมีนัยสำคัญ โดยพบว่าตำแหน่งของรถมีความแตกต่างสูงสุดประมาณร้อยละ 25, มุมของลูกตุ้มมีความแตกต่างสูงสุดประมาณร้อยละ 18 และ ความเร็วของรถมีความแตกต่างสูงสุดประมาณร้อยละ 14 เมื่อเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ทางทฤษฎี สาเหตุหลักของความคลาดเคลื่อนเหล่านี้เกิดจากอิทธิพลของความไม่เป็นเชิงเส้นทางตรีโกณมิติและผลกระทบจากแรงหนีศูนย์กลางที่ทวีความรุนแรงขึ้นเมื่อก้านลูกตุ้มมีมุมเอียงขนาดใหญ่ ทำให้แรงที่กระทำต่อระบบไม่เชิงเส้นมีความซับซ้อนเกินกว่าที่สมการเชิงเส้นจะสามารถอธิบายได้อย่างครอบคลุม ส่งผลให้ระบบต้องใช้ระยะเวลาในการปรับตัวเพื่อเข้าสู่สภาวะคงตัวนานกว่าที่ทฤษฎีคาดการณ์ไว้

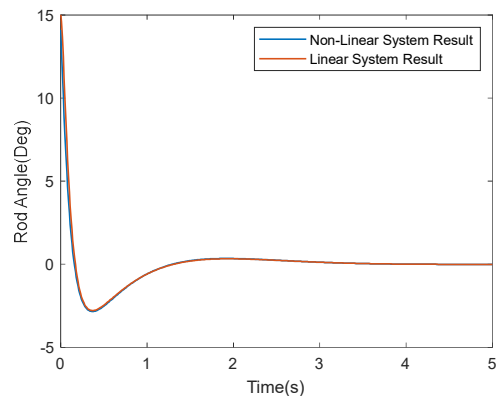
ถึงแม้ว่าจะปรากฏความคลาดเคลื่อนในการตอบสนองที่มุม 30 องศา แต่ระบบควบคุม LQR ยังคงแสดงศักยภาพในการรักษาเสถียรภาพของระบบได้อย่างน่าพึงพอใจ โดยสามารถประคองก้านลูกตุ้มให้กลับมามุ่งตรงและควบคุมตำแหน่งของรถให้หยุดนิ่งที่จุดเป้าหมายได้ภายในระยะเวลาที่กำหนดโดยไม่เกิดการลื่นไหลหรือการแกว่งที่ไร้เสถียรภาพ ผลลัพธ์นี้ยืนยันว่าตัวควบคุมที่ออกแบบขึ้นมีความทนทาน (Robustness) เพียงพอที่จะรองรับความไม่แน่นอนของแบบจำลองและผลกระทบจากการคำนวณแบบไม่ต่อเนื่องได้ แม้ในสภาวะที่ระบบต้องทำงานภายใต้พลวัตที่ไม่เป็นเชิงเส้นอย่างรุนแรงก็ตาม



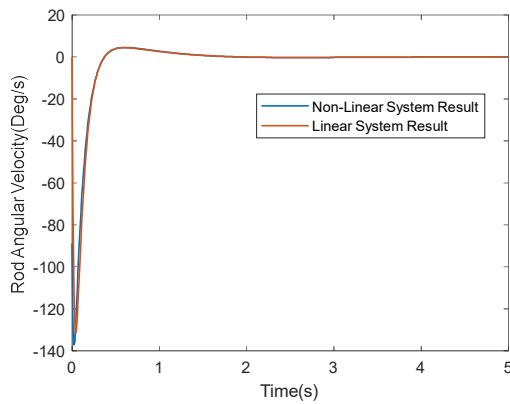
รูปที่ 2 ตำแหน่งของรถเทียบกับเวลา
ในเงื่อนไขมุมเริ่มต้น 15 องศา



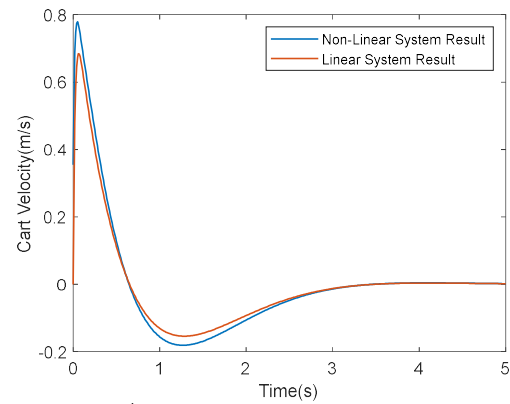
รูปที่ 3 ความเร็วของรถเทียบกับเวลา
ในเงื่อนไขมุมเริ่มต้น 15 องศา



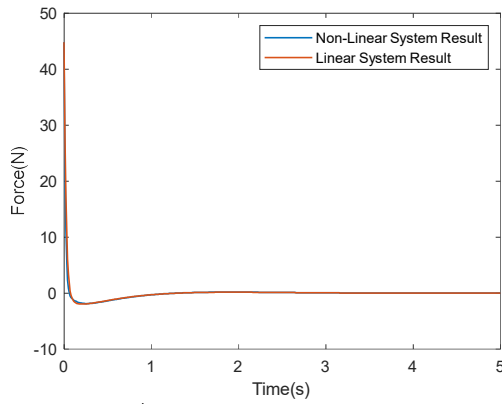
รูปที่ 4 มุมของลูกตุ้มเทียบกับเวลา
ในเงื่อนไขมุมเริ่มต้น 15 องศา



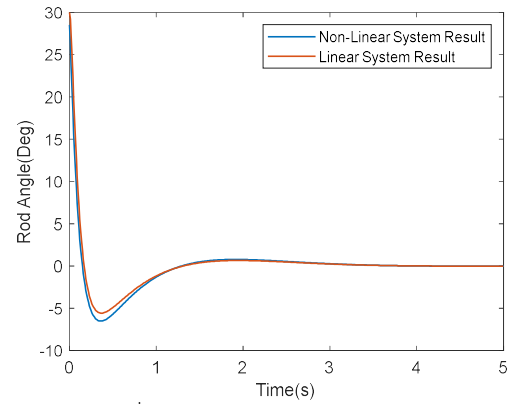
รูปที่ 5 ความเร็วเชิงมุมเทียบกับเวลา
 ในเงื่อนไขมุมเริ่มต้น 15 องศา



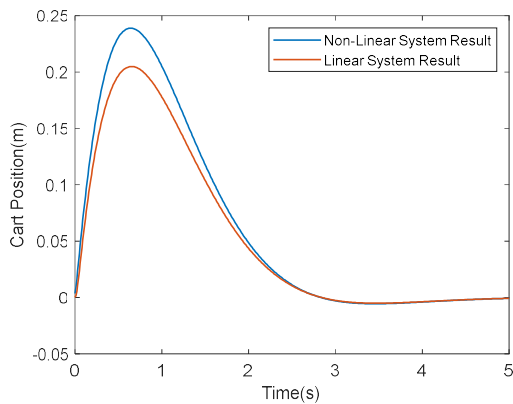
รูปที่ 8 ความเร็วของรถเทียบกับเวลา
 ในเงื่อนไขมุมเริ่มต้น 30 องศา



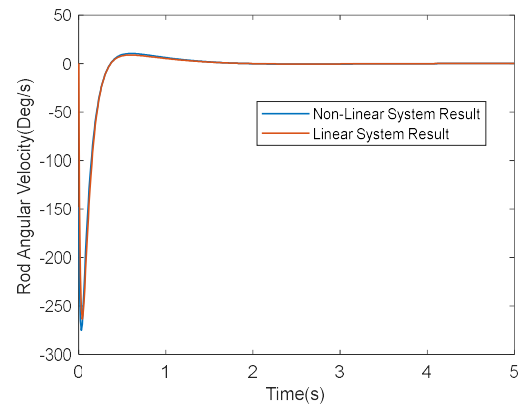
รูปที่ 6 แรงควบคุมเทียบกับเวลา
 ในเงื่อนไขมุมเริ่มต้น 15 องศา



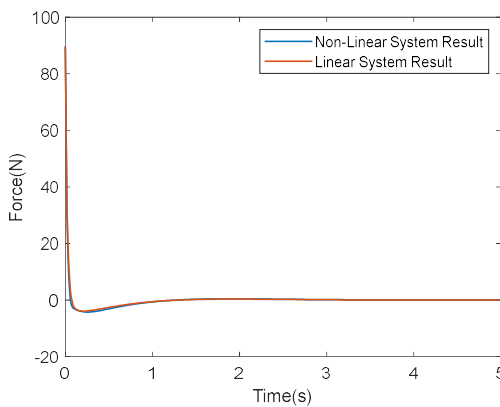
รูปที่ 9 มุมของลูกตุ้มเทียบกับเวลา
 ในเงื่อนไขมุมเริ่มต้น 30 องศา



รูปที่ 7 ตำแหน่งของรถเทียบกับเวลา
 ในเงื่อนไขมุมเริ่มต้น 30 องศา



รูปที่ 10 ความเร็วเชิงมุมเทียบกับเวลา
 ในเงื่อนไขมุมเริ่มต้น 30 องศา



รูปที่ 11 แรงควบคุมเทียบกับเวลา
ในเงื่อนไขมุมเริ่มต้น 30 องศา

5. สรุปผลการทดลอง (Conclusion)

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาและตรวจสอบสมรรถนะของระบบควบคุมแบบ Linear Quadratic Regulator (LQR) ที่สังเคราะห์จากแบบจำลองเชิงเส้นของระบบลูกตุ้มกลับหัวบนรถขับเคลื่อน เพื่อนำไปประยุกต์ใช้กับแบบจำลองไม่เชิงเส้นภายใต้ขอบเขตเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete-time) โดยจำลองเปรียบเทียบภายใต้เงื่อนไขมุมเริ่มต้น 15 องศา และ 30 องศา ผลการศึกษาพบว่า ที่มุมเริ่มต้น 15 องศา พฤติกรรมการตอบสนองของแบบจำลองทั้งสองสอดคล้องกันเป็นอย่างดี โดยเส้นกราฟของมุมลูกตุ้มและตำแหน่งรถมีแนวโน้มใกล้เคียงกันตลอดช่วงเวลาทดสอบ ซึ่งยืนยันว่าในย่านมุมเบี่ยงเบนไม่มาก สมมติฐานเชิงเส้นยังคงมีความเที่ยงตรงและสามารถใช้เป็นพื้นฐานในการออกแบบตัวควบคุมที่มีประสิทธิภาพ ทำให้ระบบสามารถหักล้างแรงโน้มถ่วงและเข้าสู่จุดสมดุลได้ดี

อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณาผลการทดสอบที่มุมเริ่มต้น 30 องศา ซึ่งเป็นจุดที่ระบบเริ่มทำงานนอกเหนือขอบเขตสมมติฐานเชิงเส้น พบความแตกต่างของพฤติกรรมระหว่างแบบจำลองเชิงเส้นและแบบจำลองไม่เชิงเส้นอย่างมีนัยสำคัญ โดยตำแหน่งของรถมีความแตกต่างสูงสุดประมาณร้อยละ 25, มุมของลูกตุ้มมีความแตกต่างสูงสุดประมาณร้อยละ 18 และความเร็วของรถมีความแตกต่างสูงสุดประมาณร้อยละ 14 อันเนื่องมาจาก

อิทธิพลของแรงปฏิกิริยาที่ไม่เป็นเชิงเส้น ความคลาดเคลื่อนเหล่านี้สะท้อนให้เห็นถึงผลกระทบของทอมตรีโกณมิติและแรงหนีศูนย์กลาง (Centrifugal Force) ที่ทวีความรุนแรงขึ้นตามขนาดของมุมเอียง ซึ่งเป็นปัจจัยที่แบบจำลองเชิงเส้นไม่สามารถครอบคลุมได้

ในภาพรวมระบบควบคุม LQR ยังคงแสดงศักยภาพที่น่าพึงพอใจในการรักษาเสถียรภาพของระบบ (Global Stability) โดยสามารถประคองก้านลูกตุ้มให้กลับมามุ่งตรงและควบคุมให้รถหยุดนิ่งที่ตำแหน่งเป้าหมายได้สำเร็จโดยไม่เกิดการล้มเหลว ผลลัพธ์นี้ยืนยันว่าตัวควบคุมที่ออกแบบด้วยทฤษฎีเชิงเส้นมีความทนทาน (Robustness) เพียงพอที่จะรองรับความไม่แน่นอนของแบบจำลอง (Model Mismatch) และผลกระทบจากการคำนวณแบบไม่ต่อเนื่อง แม้ต้องเผชิญกับพลวัตไม่เชิงเส้นที่ซับซ้อน ดังนั้น การประยุกต์ใช้ LQR กับระบบไม่เชิงเส้นจึงเป็นแนวทางที่มีประสิทธิภาพ หากคำนึงถึงขอบเขตการทำงานและความคลาดเคลื่อนที่อาจเกิดขึ้นอย่างเหมาะสม อย่างไรก็ตาม งานวิจัยนี้ยังไม่ได้พิจารณาข้อจำกัดของตัวกระทำ โดยเฉพาะอาการ Motor Saturation ซึ่งอาจทำให้แรงควบคุมจาก LQR ไม่สามารถนำไปใช้ได้เต็มที่และกระทบต่อเสถียรภาพของระบบในบางสถานะ

นอกจากนี้ การศึกษาเชิงเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นช่วยให้เห็นขอบเขตของการประมาณโมเดล (Model Simplification) โดยแบบจำลองเชิงเส้นสะท้อนกรณีที่ลดรูปพลวัตเพื่อความง่ายในการออกแบบ ขณะที่แบบจำลองไม่เชิงเส้นสะท้อนพฤติกรรมจริงที่ซับซ้อน ผลการเปรียบเทียบจึงชี้ให้เห็นช่องว่างของสมรรถนะและข้อจำกัดของตัวควบคุมเชิงเส้นเมื่อนำไปใช้กับระบบจริง ดังนั้น งานวิจัยในอนาคตสามารถต่อยอดสู่ตัวควบคุมแบบ Data-driven หรือปัญญาประดิษฐ์ (Artificial Intelligence) เพื่อเรียนรู้พลวัตของระบบจากข้อมูลและปรับปรุงสมรรถนะให้ทำงานได้มีประสิทธิภาพทั้งสองแบบจำลอง โดยมีเป้าหมายเพื่อลดความแตกต่างของผลลัพธ์และยกระดับประสิทธิภาพเหนือกว่าวิธีดั้งเดิม

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] T. Abut, “An inverted pendulum system control with fuzzy linear quadratic regulator method: Experimental validation,” *Computers, Materials and Continua*, vol. 85, no. 2, pp. 4023–4042, 2025.
- [2] W. Chu and Y. Q. Wang, “Vibration control of a flexible inverted pendulum using the planned flywheel motion,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 569, Art. no. 117975, 2024.
- [3] S. J. Chacko, N. P. C. and R. J. Abraham, “Optimizing LQR controllers: A comparative study,” *Results in Control and Optimization*, vol. 14, Art. no. 100387, 2024.
- [4] G. Gao, L. Xu, T. Huang, X. Zhao and L. Huang, “Reduced-order observer-based LQR controller design for rotary inverted pendulum,” *CMES—Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 140, no. 1, pp. 305–323, 2024.
- [5] Q. Zhu, C. Lei, B. Shi, J. Zhang and J. Wang, “Model-free robust underactuated control of inverted pendulums,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 362, no. 13, Art. no. 107911, 2025.
- [6] Y. Iwanaga and Y. Fujimoto, “Enhancing computational efficiency of iLQR and DDP via the parametric representation of control inputs,” *Results in Control and Optimization*, vol. 20, Art. no. 100587, 2025.
- [7] Y. Qu, Z. Liu, and L. Cai, “Simultaneous planning and executing (SPAEC) control for a fourth-order underactuated inverted pendulum with double-layer asynchronous convergence,” *ISA Transactions*, vol. 163, pp. 162–171, 2025.
- [8] L. Nisar, M. H. Koul and B. Ahmad, “Controller design aimed at achieving the desired states in a 2-DOF rotary inverted pendulum,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 57, pp. 256–261, 2024.
- [9] G. S. Menon, T. Vinopraha, J. Lithika and S. Kannan, “Convex optimisation based real time predictive control using a novel warm start technique,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 57, pp. 71–76, 2024.
- [10] B. Czaplewski, M. Bocian, and J. H. G. Macdonald, “Calibration of inverted pendulum pedestrian model for laterally oscillating bridges based on stepping behaviour,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 572, Art. no. 118141, 2024.
- [11] K. Ogata, *Modern Control Engineering*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2010.