บทความวิชาการ

การวิวัฒน์เชิงเวลาของโซลิตอนในพลาสมา

TIME EVOLUTION OF A SOLITON IN PLASMA

ศรัณย์ ภิบาลชนม์
คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
E-mail : sarunp@buu.ac.th

บทคัดย่อ

ระเบียบวิธีแบบสเปกตรัมจะนำมาประยุกต์ใช้ศึกษาการวิวัฒน์เชิงเวลาเกี่ยวกับของผลเฉลยคลื่นของโซลิตารีในสมการ Korteweg-de Vries (KdV) ซึ่งเป็นสมการที่ใช้บรรยายคลื่นไอออนในตัวกลางพลาสมา ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าผลของการชนกันตรงๆ ระหว่างของคลื่นโซลิตารี 2 คลื่น จะได้คลื่นอาพันธ์

คำสำคัญ : โซลิตอน พลาสมา ระเบียบวิธีสเปคตรัม

ABSTRACT

The spectral method is applied to study the time evolution of a solitary wave solution of the Korteweg-de Vries (KdV) equation which describes the ion-acoustic wave in plasma media. The numerical result of the head-on collision between 2 solitons also shows the coherent structure of these kinds of waves.

KEYWORDS : Solitons, Plasmas, Spectral Method

บทนำ

คลื่นโซลิตารีเป็นคลื่นที่ถูกค้นพบครั้งแรกในปี ค.ศ. 1844 โดย John Scott Russell (1808-1882) โดยได้สังเกตการเคลื่อนที่ของเรือที่แล่นอยู่ในคลองที่ชื่อ Union Canal แล้วหยุดอย่างกะทันหัน ซึ่งทำให้เกิดคลื่นในบริเวณหน้าเรือโดยคลื่นดังกล่าวเคลื่อนที่โดยอัตราเร็วคงที่ และไม่เปลี่ยนรูปร่าง (Russell, 1984) อย่างไรก็ตาม สมการที่บรรยายปรากฏการณ์นี้ได้ถูกนำเสนอโดย Diederik Korteweg และ Gustav de Vries ในปี ค.ศ. 1895 (Korteweg et.al., 1898) จนเป็นที่มาของสมการ KdV

$$\phi_t + \phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0 \qquad (1)$$

โดยตัวห้อย t และ x แสดงถึงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลาและตำแหน่ง ตามลำดับ และ ϕ จะแสดงอัมปลิจูดของระดับผิวน้ำ เทอมที่ 2 ทางซ้ายมือของสมการที่ (1) จะแสดงถึงความไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear effect) ซึ่งจะทำให้ความสูงของคลื่นสูงขึ้นเมื่อเวลาผ่านไป เทอมที่ 3 จะแสดงถึงผลของการกระจาย (dispersion effect) ซึ่งจะทำให้ความสูงของคลื่นลดลงเมื่อเวลาผ่านไป เมื่อใดที่ขนาด หรือปริมาณของผลทั้งสองเท่ากัน จะทำให้ได้โครงสร้างของคลื่นที่เคลื่อนที่อยู่ในตัวกลางคงที่

บทความนี้จะกล่าวถึงสมการที่ใช้บรรยายคลื่นโซลิตารีในตัวกลางพลาสมา รวมทั้งการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการศึกษาการเคลื่อนที่ของคลื่นโซลิตารีเพื่อแสดงว่าคลื่นนี้เคลื่อนที่โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงความสูง รวมทั้งการจำลองการชนกันตรง ๆ ของคลื่นโซลิตารี โดยจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

คลื่นโซลิตารีในตัวกลางพลาสมา

พลาสมาเป็นสถานะที่ 4 ของสสาร (Chen, 1984) โดยจะประกอบด้วยประจุของอนุภาคบวก และ ลบ แต่สถานะโดยรวมของพลาสมาจะเป็นกลางทางไฟฟ้า แม้ว่าจะมีคลื่นได้หลายแบบ ในตัวกลางพลาสมาแต่เราจะพิจารณาการสั่นของคลื่นไอออนบวกที่ถูกล้อมรอบด้วยไอออนลบ (อิเล็กตรอน) โดยอันตรกิริยาระหว่างประจุไฟฟ้าทั้งสองเป็นควบคุมด้วยแรงคูลอมบ์ และไม่มีการชนกันระหว่างประจุทั้งสองชนิด ซึ่งสมมุติฐานที่ใช้พิจารณานี้ถูกเสนอโดย Washimi และ Taniuti (Washimi et.al., 1966) โดยพิจารณาว่าตัวกลางพลาสมาเป็นของไหลชนิดหนึ่ง ดังนั้นสมการที่ควบคุมการไหลของพลาสมาจะประกอบด้วยสมการความต่อเนื่อง (continuity equation) ในกรณีที่เคลื่อนที่ในแนวแกน x อย่างเดียว

$$n_t + (un)_x = 0 \qquad (2)$$

โดยที่ n คือความหนาแน่นของไอออนบวก และ u แสดงถึงอัตราเร็วของไอออนบวก จาก สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$n_t + (u\partial_x)u = -\phi_x \qquad (3)$$

ซึ่ง ϕ แสดงถึงศักย์ไฟฟ้าระหว่างประจุบวก และประจุลบ และจากสมการ Poisson

$$\phi_{xx} = n_e - n \qquad (4)$$

โดย n_e แสดงถึงความหนาแน่นของอิเล็กตรอน สมการ (3) เป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น ทำให้การหาผลเฉลยของระบบสมการนี้ทำได้ยาก Washimi และ Taniuti ได้ใช้ระเบียบวิธีการรบกวน (perturbation method) ในการหาผลเฉลยโดยพิจารณาอิทธิพลของความไม่เป็นเชิงเส้นอย่างอ่อน (weakly nonlinear effect) ทำให้สามารถเขียนตัวแปรต่าง ๆ ในรูปของการประมาณ กล่าวคือ

$$n = 1 + \in n_1 + \in^2 n_2 + \ldots \qquad (5)$$

$$u = \in u_1 + \in^2 u_2 + \ldots \qquad (6)$$

$$\phi = \in \phi_1 + \in^2 \phi_2 + \ldots \qquad (7)$$

ซึ่ง $\in << 1$ เนื่องจากในที่นี้เราพิจารณาว่ามีเพียงแรงคูลอมบ์ที่เท่ากันกระทำระหว่างประจุไฟฟ้า และไม่มีการชนกันระหว่างประจุไฟฟ้าที่ต่างชนิดกัน ทำให้การกระจายตัวของอิเล็กตรอนเป็นแบบปกติ (normal distribution หรือ Maxwellian distribution) (Washimi, et.al., 1966)

$$n_e = e^{\phi} \qquad (8)$$

เมื่อแทนค่า (5)-(7) ลงใน (2)-(4) และ (5) แล้วพิจารณาตามอันดับของ $\in$ จะได้ว่า

$$n_1 = u_1 = \phi_1$$

และ $$\phi_{1t} + \phi_1\phi_{1x} + \phi_{1xxx} = 0$$

จะได้สมการ KdV ซึ่งเป็นการบรรยายคลื่นไอออนไม่เชิงเส้นอย่างอ่อน เราจะตัดตัวห้อยหนึ่งออกเพื่อความสะดวก

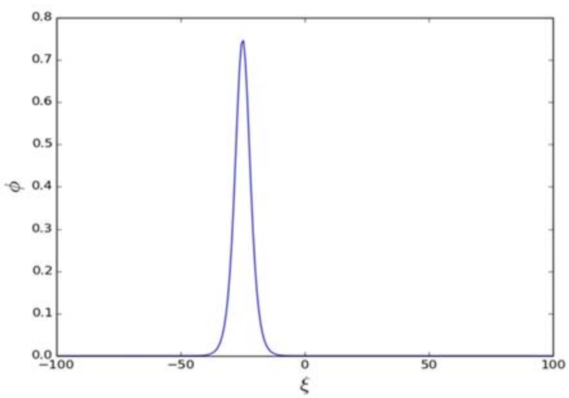
ในการหาผลเฉลยของสมการ KdV จะพิจารณาโดยการเปลี่ยนตัวแปร, $\xi = x - ct$ ซึ่ง c แสดงอัตราเร็วของคลื่นในผลเฉลยของสมการ KdV ดังนั้นสมการอนุพันธ์ย่อยจะกลายเป็นสมการอนุพันธ์ปกติ

$$-c\phi_{\xi}+\phi\phi_{\xi}+\phi_{\xi\xi\xi}=0 \qquad (9)$$

และพิจารณาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและค่าขอบเพื่อให้ได้คลื่นโซลิตารี $\phi \to 0, \phi_{\xi} \to 0$ และ $\phi_{\xi\xi} \to 0$ เมื่อ $|\xi| \to \infty$ ดังนั้นผลเฉลยของ KdV โดยการอินทิเกรตตามเงื่อนไขนี้ (ดูภาคผนวก) จะเขียนได้เป็น

$$\phi(\xi)=12\eta^2 sech^2\eta(\xi-\xi_0) \qquad (10)$$

โดย η เป็นจำนวนจริงใดๆ ในกรณีที่ $\eta = 0.25$ และ $\xi_0 = -25$ แสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 โครงสร้างของผลเฉลยจากสมการที่ (10) โดยที่ $\eta = 0.25, \xi_0 = -25$

ระเบียบวิธีสเปกตรัม

การศึกษาการวิวัฒน์เชิงเวลาของคลื่นไม่เป็นเชิงเส้นนี้เราจะนำวิธีสเปกตรัม (spectral method) (Press, 1992) โดยหลักการแล้ววิธีสเปกตรัมเป็นการใช้การแปลงฟูเรียร์จากปริภูมิอวกาศ (space) x ให้อยู่ในปริภูมิอวกาศโมเมนตัม (momentum space) เพื่อให้คำนวณได้ง่าย และถูกต้องแม่นยำยิ่งขึ้น การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันใดๆ สามารถเขียนได้เป็น

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

สำหรับการแปลงกลับสามารถเขียนเป็น

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}dk$$

เมื่อแปลงฟูเรียร์ตามอวกาศ x สมการ KdV (ใช้) จะเขียนอยู่ในรูปของ

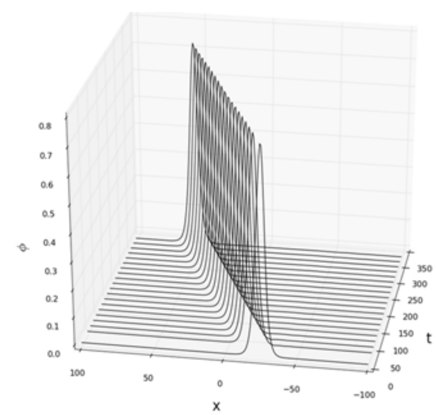
$$\hat{\phi}_t = i\frac{k}{2}\hat{\phi}^2 - ik^3\hat{\phi}$$

โดยค่าเริ่มต้นจะเป็นผลเฉลยของสมการ (1) กล่าวคือ

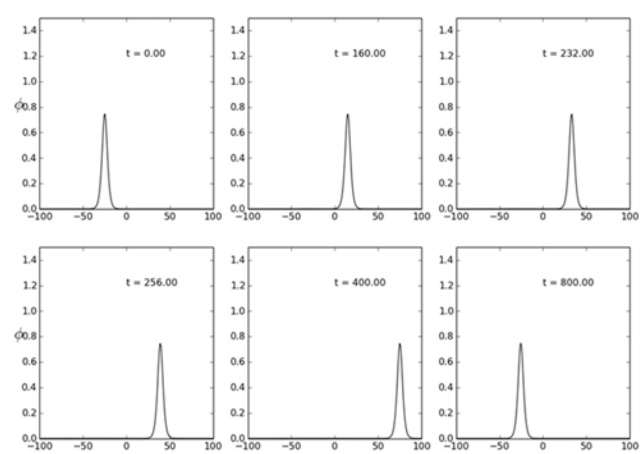
$$\phi(x)=12\eta^2 sech^2\eta(x-x_0)$$

การวิวัฒน์ตามเวลาของผลเฉลยสามารถแสดงได้ในรูปที่ 2 โดยใช้เงื่อนไข $\eta = 0.25$, N=256 และจุดเริ่มต้นของโซลิตอน อยู่ที่ x_0 = -25 ระยะทางที่เราสังเกต L = 200 และเวลาเพิ่มขึ้นครั้งละ 0.001 จากรูปที่ 2 จะแสดงให้เห็นว่าโซลิตอนเคลื่อนที่โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงความสูง

นอกจากนี้เรายังสามารถแสดงกราฟย่อย (subplot) ได้โดยแสดงในรูปที่ 3 ซึ่งแสดงในช่วงเวลาที่เลือกมา



รูปที่ 2 การวิวัฒน์เชิงเวลาของโซลิตอนโดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง โดยเริ่มจาก

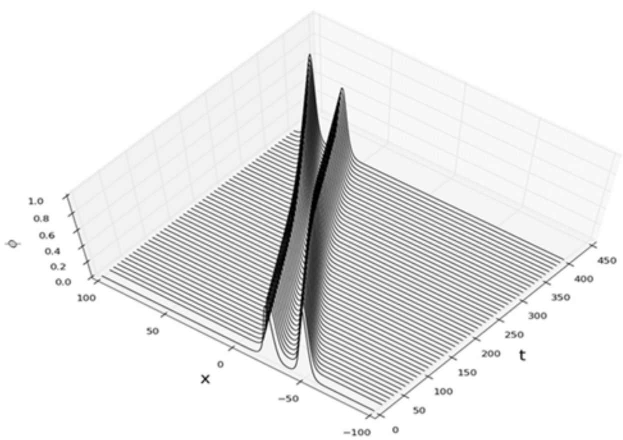


รูปที่ 3 การวิวัฒน์เชิงเวลาของคลื่นโซลิตารี ณ เวลาต่างๆ (1) t = 0, (2) t = 160, (3) t = 232, (4) t = 256, (5) t = 400, (6) t = 800

คือการมีพฤติกรรมที่คล้ายกับอนุภาค โดยปรากฏการณ์นี้สามารถแสดงให้เห็นจากศึกษาการชนกันตรงๆ ของโซลิตอน หลังจากการชนกันแล้ว เราจะได้โซลิตอนตัวเดียวกันกลับคืนมา ซึ่งไม่เหมือนกับคลื่นโดยทั่วไป การศึกษาการชนกันเราจะเปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

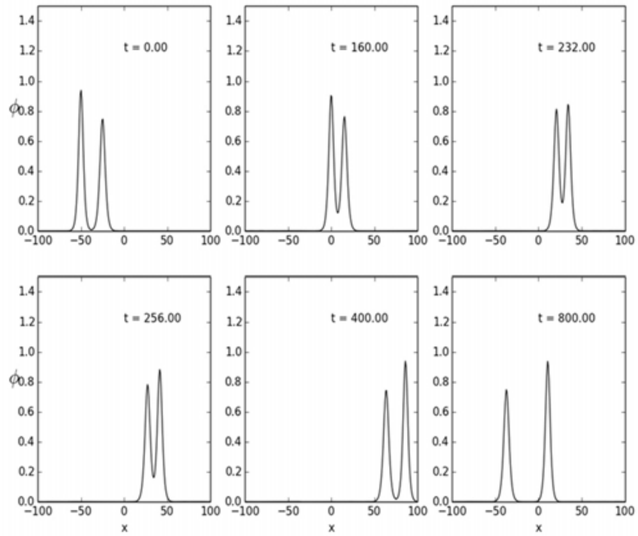
$$\phi(x) = 12\eta_1^2 sech^2 \eta_1 (x - x_{01}) + 12\eta_2^2 sech^2 \eta_2 (x - x_{02})$$

โดย $\eta_1 = 0.25, \eta_2 = 0.28$ และ $x_{01} = -25, x_{02} = -50$ ความเร็วของโซลิตอนจะขึ้นกับความสูงของคลื่น จากรูปที่ 4 คลื่นตัวด้านขวามือมีความสูงมากกว่าคลื่นตัวช้า จึงมีความเร็วมากกว่า และเคลื่อนที่เข้าไปชนกับคลื่นที่วิ่งช้ากว่าแล้วเคลื่อนที่นำห่างออกไป และรูปที่ 5 แสดงการเคลื่อนที่ ณ เวลาต่างๆ

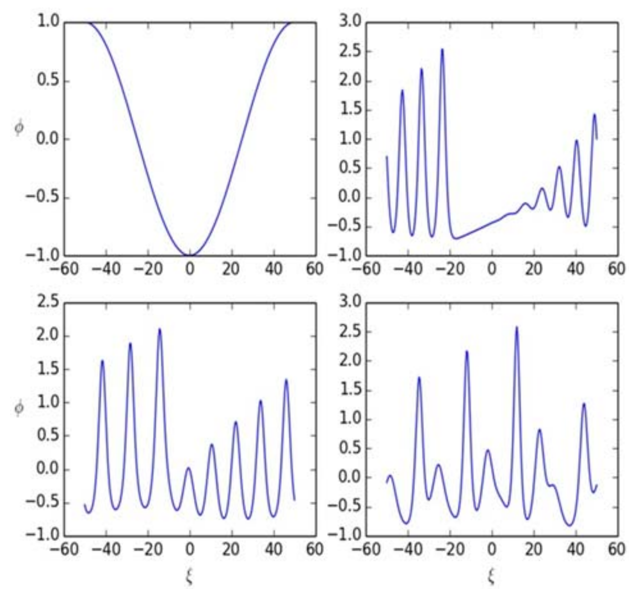


รูปที่ 4 การชนกันของโซลิตอน 2 ตัว ใน 3 มิติ

ผลดังกล่าวนี้ถูกแสดงครั้งแรกโดย Zabusky และ Kruskal (Zabusky et.al., 1965) ตามรูปที่ 6 และเป็นคนแรกที่เรียกคลื่นโซลิตารีว่าโซลิตอน โดยได้ใช้ค่าเริ่มต้นอยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณฯ (รูปที่ 6 บนซ้าย) ซึ่งเปรียบเสมือนถุงที่ใส่คลื่นโซลิตารีไว้เมื่อแทนกลับไปในสมการ KdV จะทำให้เกิดคลื่นโซลิตารีเคลื่อนที่ออกตามที่บรรยายในสมการ KdV (รูปที่ 6 บนขวา) เมื่อได้คลื่นโซลิตารีทั้งหมดออกมาแล้ว (รูปที่ 6 ล่างซ้าย) เคลื่อนโซลิตารีจะวิ่งเข้าหากันเกิดการชนกันระหว่างคลื่นโซลิตารีและผลของการชนกันแสดงให้เห็นว่าหลังจากการชนกันจะได้คลื่นโซลิตารีที่มีโครงสร้างเดิมกลับมาซึ่ง Zabusky และ Kruskal ได้เรียกคลื่นนี้อีกอย่างว่าโซลิตอน



รูปที่ 5 แสดงการชนกันของโซลิตอน 2 ตัว ณ ช่วงเวลาต่างๆ โดย (1) t = 0, (2) t = 160, (3) t = 232, (4) t = 256, (5) t = 400, (6) t = 800



รูปที่ 6 กระบวนการเกิดคลื่นโซลิตารีในพลาสมา และการชนกัน

บทสรุป

คลื่นโซลิตารีเป็นคลื่นที่เคลื่อนที่อยู่ในตัวกลางต่อเนื่อง ไม่ว่าจะเป็นน้ำหรือพลาสมาโดยที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างของคลื่น อย่างไรก็ดีถ้าคลื่นโซลิตารีมีการชนกันแล้วได้โครงสร้างแบบเดิมกลับมาหลังการชน เราจะเรียกคลื่นโซลิตารีนี้อีกชื่อหนึ่งว่าโซลิตอนเพราะให้ผลที่เหมือนกับกรณีอนุภาคชนกัน การใช้ประโยชน์จากคุณสมบัตินี้อาจเกิดขึ้นในการสื่อสาร เพราะเมื่อนำข้อมูลใส่ในโซลิตอนแล้วให้เคลื่อนที่ในตัวกลาง ซึ่งไม่มีการสูญเสียของสัญญาณจะทำให้การส่งข้อมูลทำได้เร็วและถูกต้อง

เอกสารอ้างอิง

Chen, F.F. 1984. **Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion.** 2nd ed., New York: Plenum Press.

Korteweg, DJ. & de Vries, G. 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, **Phil. Mag.** 5(39): 422-443.

Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W. and Flannery, B.P. 1992. P. 496, **Numerical Recipes in C,** 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, UK.

Russell, J.S. 1844. Report on waves, **14th meeting of the British Association for the Advancement of Science,** London: John Murray, 311-91.

Washimi, H. and Taniuti, T. 1966. Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude, **Phys. Rev. Lett,** 17: 996-8.

Zabusky, NJ. and Kruskal, MD. 1965. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, **Phys. Rev. Lett.**, 15(6): 240-3.

ภาคผนวก

การหาผลเฉลยของสมการ (9)

$$\phi_{\xi\xi\xi} = c\phi_\xi - \phi\phi_\xi$$

อินทิเกรตเทียบกับ ξ จะได้

$$\phi_{\xi\xi} = c\phi - \phi^2/2 + d$$

โดย d เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรต แต่จากเงื่อนไขของคลื่นโซลิตารี $\phi_{\xi\xi} = \phi_\xi = \phi = 0$ เมื่อ $|\xi| \to \infty$ เราจะเปลี่ยนมาอินทิเกรตเทียบกับ ϕ โดยการใช้กฎลูกโซ่กับเทอมด้านซ้ายมือ

$$\phi_{\xi\xi} = \frac{d\phi_\xi}{d\phi}\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\phi}\left(\phi_\xi^2\right) = c\phi - \phi^2/2$$

เมื่ออินทิเกรตเทียบกับ ϕ แล้วใช้เงื่อนไขค่าขอบจะสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 = \frac{c\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{6}$$

จัดรูปเพื่ออินทิเกรตเทียบกับ ξ

$$\int d\xi = \int \frac{d\phi}{\phi\sqrt{c-\phi/3}}$$

พิจารณา

$$\phi = 3c\,sech^2 z$$

เมื่อแทนค่ากลับเข้าในอินทิกรัล จะสามารถหาค่า z ได้เป็น

$$\xi - \xi_0 = -\frac{2}{\sqrt{c}} z$$

ดังนั้นผลเฉลยของคลื่นโซลิตารีจะอยู่ในรูปของ

$$\phi = 3c\,sech^2\left(-\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - \xi_0)\right)$$

เนื่องจากฟังก์ชัน $sech(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ และกำหนดให้ $\eta = \sqrt{c}/2$ เราสามารถเขียนผลเฉลยได้เป็น

$$\phi = 12\eta^2 sech^2 \eta(\xi - \xi_0)$$

>> **ศรัณย์ ภิบาลชนม์**

สำเร็จการศึกษา วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาฟิสิกส์ จากมหาวิทยาลัยมหิดล วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาฟิสิกส์ จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาฟิสิกส์ จากมหาวิทยาลัยมหิดล ประวัติการทำงาน ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา หัวข้อวิจัยที่เชี่ยวชาญ Computational physics, Nonlinear physics, Mathematical physics