

การวิเคราะห์เสถียรภาพและการออกแบบตัวควบคุมแบบแผนเลื่อน
สำหรับระบบไม่เชิงเส้นอันดับที่สอง: บทความช่วยสอน
Stability Analysis and Sliding-Mode Controller Design
for a Nonlinear Second-Order System: A Tutorial

อิทธิเดช มูลมั่งมี

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

9/9 หมู่ 9 ถ.แจ้งวัฒนะ ต.บางพูด อ.ปากเกร็ด จ.นนทบุรี 11120

ittidej.moo@stou.ac.th

Ittidej Moonmangmee

School of Science and Technology, Sukhothai Thammathirat Open University

9/9 Mu 9, Chaengwattana Rd., Bangpood, Pakkret, Nonthaburi, 11120, Thailand

ittidej.moo@stou.ac.th

วันที่รับบทความ 18 ธันวาคม 2567.

วันแก้ไขบทความ 20 ธันวาคม 2567.

วันตอบรับบทความ 25 ธันวาคม 2567.

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นบทความวิชาการในลักษณะของบทความช่วยสอนที่แนะนำการออกแบบตัวควบคุมแบบแผนเลื่อนขั้นต้นสำหรับระบบไม่เชิงเส้นอันดับที่สอง พฤติกรรมของแนววิถีระบบที่ถูกควบคุมด้วยตัวควบคุมแบบแผนเลื่อนในอุดมคติจะมีลักษณะที่สั่นด้วยความถี่สูงมากเนื่องจากการใช้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง จึงไม่เหมาะกับการนำไปใช้ในระบบจริง การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันต่อเนื่องอิมพัลส์ที่มีความชันสูงแทนฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง ทำให้ตัวควบคุมแบบแผนเลื่อนยังสามารถทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยปราศจากการสั่นของสัญญาณควบคุม จึงไม่เป็นอันตรายต่อระบบควบคุม การทำงานของตัวควบคุมแบบแผนเลื่อนมีสองเฟสคือ Reaching phase และ Sliding phase การออกแบบพื้นผิวแผนเลื่อนและกฎการควบคุมในรูปฟังก์ชันการสวิตช์ทำให้แนววิถีเริ่มต้นของระบบเคลื่อนที่เข้าหาพื้นผิวแผนเลื่อนและคงอยู่ภายในชั้นขีดผิดพลาดไปจนเข้าสู่จุดกำเนิด การประมาณขอบเขตการดึงดูดทำให้สามารถกำหนดขนาดชั้นขีดผิดพลาดซึ่งจำกัดการเคลื่อนที่แบบสั่นให้อยู่ภายในนั้นได้นอกจากนั้นโดยทฤษฎีเสถียรภาพของเลียปูนอฟสามารถพิสูจน์ได้ว่าจุดสมดุลของระบบปิดด้วยการควบคุมแบบแผนเลื่อนมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับกว้าง

คำสำคัญ: การควบคุมแบบแผนเลื่อน, การควบคุมไม่เชิงเส้น, เสถียรภาพของจุดสมดุล, เสถียรภาพของเลียปูนอฟ

ABSTRACT

This article is an academic article in the form of a tutorial that introduces the design of a sliding mode controller for a nonlinear second-order system. Traditional controllers induce high-frequency oscillations due to discontinuous functions, making them impractical for real-world applications. To reduce chattering

and improve efficiency, a high-slope saturation function is used. The sliding mode control scheme consists of two phases: the reaching phase and the sliding phase. By designing the sliding surface and switching function, the system trajectory moves towards the sliding surface and stays within the boundary layer until reaching the origin. Estimating the region of attraction allows for defining a compact set of boundary layer that confines zig-zag motion. Additionally, Lyapunov's stability theory is used to prove that the closed-loop system's equilibrium point is globally asymptotically stable. This validation highlights the robustness and reliability of the proposed control design.

KEYWORDS: sliding mode control, nonlinear control, stability of equilibrium point, Lyapunov's stability

1. บทนำ

ทฤษฎีการควบคุม (control theory) เป็นสาขาวิชาที่ศึกษาทั้งในทางวิศวกรรมศาสตร์และคณิตศาสตร์ประยุกต์เกี่ยวกับการควบคุม (control) ระบบพลวัต (dynamical systems) ซึ่งพบได้ในกระบวนการ (process) หรือพลานต์ (plant) ทางวิศวกรรม เช่น ระบบอัตโนมัติต่าง ๆ ที่ใช้ในอุปกรณ์เครื่องกล-ไฟฟ้า (electro-mechanical systems) เครื่องปรับอากาศ เครื่องจักรกล มอเตอร์ไฟฟ้า หุ่นยนต์ อากาศยานทั้งแบบมีคนขับและไร้คนขับหรือ UAV (Unmanned Aerial Vehicle) เป็นต้น ระบบเหล่านี้ล้วนอาศัยการควบคุมแบบป้อนกลับ (feedback control) เพื่อให้ได้ผลตอบสนองหรือเอาต์พุตมีค่าตามต้องการ รวมทั้งสอดคล้องกับข้อกำหนดด้านสมรรถนะ (performance specifications) ของระบบควบคุมทั้งด้านเสถียรภาพ (stability) ความเร็ว (speed) ของการตอบสนอง และด้านความคงทน (robustness) ต่อการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์จริงกับค่าที่ใช้ออกแบบ เนื่องจากอายุการใช้งาน การที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์บางตัว หรือพารามิเตอร์ของระบบมีความไม่แน่นอน (plant uncertainty) เป็นต้น

การออกแบบหรือการสังเคราะห์การควบคุม (control design/synthesis) สำหรับระบบควบคุมอิงแบบจำลอง เริ่มจากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งโดยทั่วไปแบบจำลองนั้นย่อมมีความผิดพลาดไปจากระบบจริง (real-world systems) เช่น ระบบจริงเป็นระบบไม่เชิงเส้น (nonlinear systems) มีการหน่วงเวลา (time delay) พารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงตามเวลา (time-varying parameters) หรือจากข้อสมมติฐานบางอย่างเพื่อลดความซับซ้อนของแบบจำลอง จากนั้นวิเคราะห์ระบบที่ยังไม่ถูกควบคุมเพื่อให้ทราบถึงธรรมชาติหรือพฤติกรรมทางพลวัตของระบบ ปัญหาการควบคุม (control problem statement) จะถูกกำหนดขึ้นตามลักษณะการทำงาน เช่น การควบคุมแบบคงค่า (regulation) การควบคุมแบบติดตาม (tracking) การขจัดการรบกวน (disturbance rejection) เป็นต้น ตัวควบคุมที่จะต้องออกแบบโดยคำนึงถึงปัจจัยจากสภาพแวดล้อมจริง จึงจะทำให้มีประสิทธิภาพที่ดีตามข้อกำหนดด้านสมรรถนะที่ได้กำหนดไว้ในตอนต้น

ระบบ VSC (Variable Structure Control) คือระบบพลวัตที่ใช้โครงสร้างการควบคุมแบบป้อนกลับร่วมกับ “กฎการตัดสินใจ (decision rule)” และ “ฟังก์ชันการสวิตช์ (switching function/logic)” ทำงานแบบปิด-เปิดด้วยความถี่สูงตามข้อมูลจากเซนเซอร์ที่วัดค่าสแตตหรือสถานะ (state) ของระบบในขณะนั้น กฎการควบคุม (control law) ดังกล่าวจะอยู่ในรูป $u = -|F_1(x)| \operatorname{sgn}(\sigma)$ โดยที่ x เป็นตัวแปรสแตต $\operatorname{sgn}(\sigma)$ เป็นฟังก์ชันการสวิตช์ ซึ่งขึ้นกับกฎการตัดสินใจคือ $\sigma = F_2(x)$ เทคนิคการควบคุมที่อยู่ในระบบ VSC รู้จักกันในชื่อ “การควบคุมแบบแผนเลื่อน (Sliding Mode Control: SMC)” (DeCarlo et al., 1998) (Fossard & Floquet, 2002)

แนวคิดของระบบ VSC มีต้นกำเนิดจากสหภาพโซเวียตในช่วงทศวรรษ 1960 โดย Vadim Ivanovich Utkin (ค.ศ. 1937–2022) วิศวกรไฟฟ้าชาวรัสเซียได้ให้กระบวนการทัศน์ใหม่ในการออกแบบตัวควบคุมแบบคงทน (robust controller) รวมถึงตัวสังเกต (หรือตัวประมาณค่าสแตต) แบบคงทน (robust state observer/estimator) ซึ่งมีประสิทธิภาพเป็นที่ยอมรับและได้รับความนิยมจนถึงปัจจุบัน (Utkin, 1992) อย่างไรก็ตาม ในบริบทของทฤษฎีการควบคุมสมัยใหม่ ระบบ VSC ด้วยตัว

ควบคุม SMC มองได้ว่าเป็นกรณีพิเศษของระบบพลวัตแบบไฮบริดจ์ (hybrid dynamical systems) เนื่องจากสแตตของระบบไหล (flows) ไปบนปริภูมิสแตตซึ่งต่อเนื่อง (continuous state space) ขณะที่โหมดของการควบคุมเป็นแบบดิสครีต (different discrete control modes) นั่นคือไม่ต่อเนื่อง (Sastry, 1999)

มีการประยุกต์ใช้การควบคุม SMC ในงานวิศวกรรมระบบควบคุมอย่างแพร่หลาย เช่น การควบคุมใบพัดกังหันลม (wind turbine) ในระบบพลังงานหมุนเวียน (renewable energy systems) (Slimen, Tlijani, Dhaoui, & Younes, 2019) การควบคุมหุ่นยนต์ (robot control) ยุคปัจจุบันที่ใช้ในอุตสาหกรรม 4.0 (Derbel, Ghommam & Zhu, 2019) เป็นต้น

2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

บทความนี้เป็นบทความวิชาการ (academic article) ในรูปแบบของบทความช่วยสอน (tutorial) เรื่องการออกแบบตัวควบคุม SMC ขั้นพื้นฐาน เพื่อสร้างความเข้าใจและให้เกิดมโนทัศน์การออกแบบ หัวข้อที่ 3 การออกแบบตัวควบคุม SMC กับระบบไม่เชิงเส้นอันดับที่สองซึ่งพารามิเตอร์ของพลาเน็ตมีความไม่แน่นอน หัวข้อที่ 4 การประมาณขอบเขตการดึงดูดของแนววิถีบนพื้นผิวแผนเคลื่อนเมื่อใช้ตัวควบคุม SMC ในอุดมคติ หัวข้อที่ 5 การนำตัวควบคุม SMC ไปใช้งานโดยเสนอการออกแบบไว้ 2 แนวทาง หัวข้อที่ 6 การประมาณขอบเขตการดึงดูดเมื่อใช้ตัวควบคุม SMC แบบต่อเนื่อง หัวข้อที่ 7 เป็นการวิเคราะห์เสถียรภาพของจุดสมดุลภายใต้กฎการควบคุม SMC แบบต่อเนื่อง และสุดท้ายเป็นสรุปผลและวิจารณ์

3. การออกแบบตัวควบคุม SMC กับระบบไม่เชิงเส้นอันดับที่สอง

พิจารณาระบบไม่เชิงเส้นอันดับที่สอง (second-order nonlinear system) ในรูป

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = h(x) + g(x)u \end{cases} \quad (1)$$

ในที่นี้ $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ เป็นเวกเตอร์ตัวแปรสแตตของระบบ h และ g เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่ไม่ทราบค่าสอดคล้องกับข้อสมมติฐานต่อไปนี้

สมมติฐาน: มีฟังก์ชัน $\varrho(x)$ และค่าคงตัว $g_0 > 0$ ที่ทราบค่าซึ่ง

$$\left| \frac{ax_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leq \varrho(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{และ} \quad g(x) \geq g_0 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

เงื่อนไขข้างต้นแสดงให้เห็นว่าระบบไม่เชิงเส้น Σ ยอมให้มีความไม่แน่นอนได้ในพจน์ของ h, g เรียกว่า Matched Uncertainty (สมนัยกับเงื่อนไข Matching Condition) กล่าวคือพจน์ความไม่แน่นอนอยู่บนสมการสแตตเดียวกับการควบคุม u ซึ่งสามารถจัดการได้โดยตรง (กรณีที่พจน์ความไม่แน่นอนอยู่บนสมการสแตตอื่นที่ไม่มี u จะเรียกว่า Mismatched Uncertainty ซึ่งไม่สามารถใช้ตัวควบคุม SMC ได้) ปัญหาการควบคุมคือ ต้องการออกแบบกฎการควบคุมแบบป้อนกลับสแตต (state-feedback control law) ในรูปของฟังก์ชันการสวิตช์ (หรือกฎการควบคุม SMC) เพื่อรักษาสถานะของระบบไม่เชิงเส้น Σ ไว้ที่จุดสมดุล (equilibrium point)¹ ที่จุดกำเนิด $(0,0)$

¹ จุดสมดุลหรือสถานะสมดุล (equilibrium state) คือ สแตตของระบบซึ่งถ้าระบบเริ่มต้น (t_0) ที่สแตตนั้นแล้ว ระบบจะยังคงอยู่ที่สแตตนั้นต่อไปไม่เปลี่ยนแปลง กล่าวคือ ถ้า x_e เป็นจุดสมดุลที่เวลา t_0 และ $x(t_0) = x_e$ แล้ว $x(t) \equiv x_e$ สำหรับทุกเวลา $t \geq t_0$

หมายเหตุ: โดยทั่วไปแบบจำลองปริภูมิสถานะที่ใช้ออกแบบการควบคุมจะอยู่ในรูป สมการสถานะความคลาดเคลื่อน (error state equation) โดยกำหนดจากตัวแปรความคลาดเคลื่อน (error state variable) $e \triangleq x - x_{des}$ เมื่อ x เป็นสแตตที่วัดได้จากเซนเซอร์ x_{des} เป็นสแตตเป้าหมายของพลาเน็ตหรือจุดทำงานที่ต้องการ (desired set point) ดังนั้น ปัญหาการควบคุมทั้งแบบ การรักษาสถานะ (stabilization) ที่จุดทำงาน และการติดตามสัญญาณอ้างอิง (tracking) ก็คือการทำให้ $e \rightarrow 0$ (จุดกำเนิด) หรือ $x \rightarrow x_{des}$ นั่นเอง

แนวคิดหลักของการออกแบบตัวควบคุม SMC คือการสร้างกฎการตัดสินใจ $\sigma = F_2(x)$ สำหรับฟังก์ชันการสวิตช์ $\text{sgn}(\sigma)$ และการออกแบบกฎการควบคุม² ในรูป $u = -|F_1(x)|\text{sgn}(\sigma)$ (Fossard & Floquet, 2002) อย่างไรก็ตาม อาจพิจารณา u ในรูปอย่างง่ายแบบหนึ่งได้เป็น $u = -\beta(x)\text{sgn}(\sigma)$ เมื่อ $\sigma = ax_1 + x_2$, $a > 0$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปรสแตตทุกตัว สำหรับ $\sigma = 0$ จะเรียกว่า “พื้นผิวแผนเลื่อน (sliding (หรือ switching) surface)”³ ขั้นตอนการออกแบบและการทำงานของตัวควบคุม SMC จะมี 2 เฟสคือ 1) Reaching Phase และ 2) Sliding Phase แสดงดังต่อไปนี้

3.1 Reaching Phase

สมมติว่าระบบ Σ มีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $x_0 \neq 0$ (สมนัยกับพื้นผิว $\sigma_0 \triangleq \sigma(x_0) \neq 0$) บนระนาบสถานะ (หรือกรณีทั่วไปคือปริภูมิสถานะ (state space)) ในขั้นตอนนี้ต้องการออกแบบกฎการควบคุม SMC เพื่อให้แนววิถีเริ่มต้นของระบบเคลื่อนที่เข้าหาพื้นผิวแผนเลื่อน $\sigma = 0$ ในเวลาจำกัด ($\sigma_0 \rightarrow \sigma = 0$ in finite time) นอกจากนั้น ยังพิสูจน์ได้อีกว่าแนววิถีจะคงอยู่ภายในชั้นขีดผิว (boundary layer) $\{|\sigma| \leq c\}$ ตลอดไป

อาศัยทฤษฎีเสถียรภาพของเลียปูนอฟ (Lyapunov’s stability theory) (Khalil, 2014) ให้ $V_\sigma = (1/2)\sigma^2$ เป็นฟังก์ชันเลียปูนอฟ (Lyapunov function)⁴ พิจารณา

$$\dot{V}_\sigma = \sigma \dot{\sigma} = \sigma(ax_2 + h(x) + g(x)u) \leq g(x)|\sigma|\varrho(x) + g(x)\sigma u \quad (\because |ax_2 + h(x)| \leq g(x)\varrho(x))$$

เมื่อใช้ $u = -\beta(x)\text{sgn}(\sigma)$ โดยที่ β เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่ต้องออกแบบ จะได้ว่า

$$\dot{V}_\sigma \leq g(x)|\sigma|\varrho(x) - g(x)\beta(x)\sigma\text{sgn}(\sigma) = -g(x)|\sigma|(\beta(x) - \varrho(x)) \quad (\because |\sigma| = \sigma\text{sgn}(\sigma))$$

เพื่อให้ $\dot{V}_\sigma < 0$ จึงเลือก $\beta(x) \geq \varrho(x) + \beta_0$ เมื่อ $\beta_0 > 0$ และเนื่องจาก $-g(x) \leq g_0 < 0$ ผลที่ได้คือ $\dot{V}_\sigma \leq -g_0\beta_0|\sigma| < 0$, $\forall \sigma \neq 0$ โดยทฤษฎีเสถียรภาพของเลียปูนอฟ จึงสรุปว่า ทุกแนววิถีเริ่มต้นจะถูกดึงดูดให้เข้าสู่พื้นผิวแผนเลื่อน $\sigma = 0$ ในเวลาจำกัด ทั้งนี้รูปแบบ $u = -\beta(x)\text{sgn}(\sigma)$ ที่ใช้ฟังก์ชันซิกนัม (signum function: sgn) เป็นฟังก์ชันการสวิตช์ จะเรียกว่า “กฎการควบคุม SMC ในอุดมคติ (ideal SMC)” ข้อสังเกตประการหนึ่งคือที่ $\sigma = 0$ จะไม่มีการทำงานของตัวควบคุม (u ไม่ปรากฏ) แม้ในทางคณิตศาสตร์จะนิยาม $\text{sgn}(0) = 0$ เป็นผลให้การเคลื่อนที่ของแนววิถีเป็นลักษณะการข้ามสลับไป-มาระหว่าง $\sigma < 0$ กับ $\sigma > 0$ ด้วยความถี่สูงมาก ๆ

² เนื่องจาก u เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง ทำให้ไม่ต่อเนื่องลิปซิทซ์ (not Lipschitz continuous) การมีอยู่จริงและมีเพียงค่าเดียวของผลเฉลย (existence and uniqueness of solution) จึงต้องพิจารณาจาก Filippov’s sense โดยประมาณให้เป็นพลวัตปรับเรียบ (smooth dynamics) (Fossard & Floquet, 2002)

³ กรณีที่เป็นระบบอันดับ 3 ขึ้นไป จะเรียกว่า “แมนนิโฟลด์แผนเลื่อน (sliding (หรือ switching) manifold)” หรือ “hyper surface”

⁴ ฟังก์ชันเลียปูนอฟ (Lyapunov function) $V: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันทอนันต์ได้อย่างต่อเนื่อง และมีสมบัติว่า $V(0) = 0$ และ $V(x) > 0$, $\forall x \neq 0$

เราอาจพิจารณาเสถียรภาพของแนววิถีได้ในอีกทางหนึ่งจากการหาผลเฉลย V_σ เริ่มจาก $\dot{V}_\sigma \leq -g_0\beta_0\sqrt{2V}$ จะได้ $dV_\sigma/\sqrt{V_\sigma} \leq -g_0\beta_0\sqrt{2} dt$ ซึ่งให้ผลเฉลยเป็น $\sqrt{V_\sigma(\sigma(t))} \leq \sqrt{V_\sigma(\sigma(0))} - (g_0\beta_0/\sqrt{2})t$ นั่นคือ $|\sigma(t)| \leq |\sigma(0)| - g_0\beta_0 t$ ซึ่งพบว่า $\sigma(t) \rightarrow 0$ ในเวลาจำกัด และเนื่องจาก $\dot{V}_\sigma \leq -g_0\beta_0|\sigma|$ จึงทำให้แนววิถีจะคงอยู่ภายในชั้นขีดผิว $\{|\sigma| \leq c\}$ ตลอดไป และมีข้อสังเกตที่สำคัญอีกประการคือ แนววิถีที่กำลังเคลื่อนที่เข้าหาพื้นผิว $\sigma=0$ จะไม่มีการสั่นเนื่องจาก σ ใน $\text{sgn}(\sigma)$ ไม่เปลี่ยนแปลงเครื่องหมาย

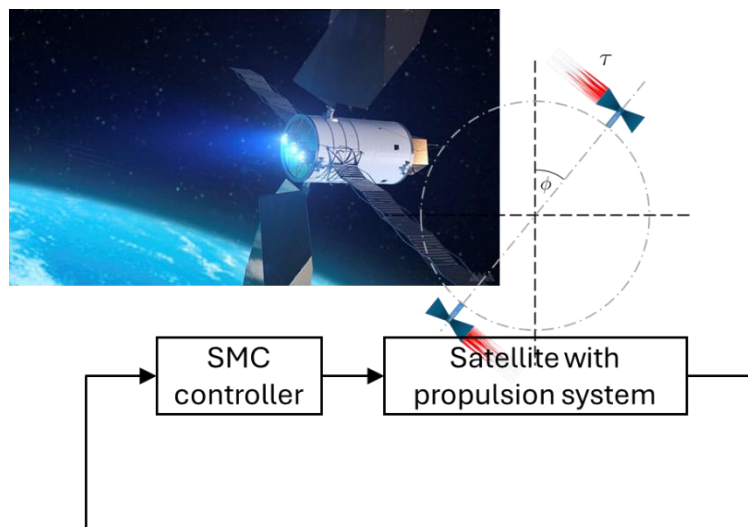
อย่างไรก็ตาม ในบางกรณีที่ฟังก์ชัน ϱ (เงื่อนไขของพจน์ความไม่แน่นอนจาก (1)) อาจหาได้ไม่ถนัดนัก สามารถใช้ค่าคงตัว $k_1 = \|\varrho(x)\| > 0$ ซึ่งกำหนดจากขอบเขตการทำงานของระบบหรือในโดเมนของ h, g ที่สนใจ นั่นคือ $|ax_2 + h(x)|/|g(x)| \leq k_1$ ทำให้ได้กฎการควบคุม SMC ในรูป

หมายเหตุ: ค่าเกน k ในกรณีนี้ได้จากการพิจารณาแบบจำลอง (สมการสแตต) ของพลาเน็ต ในกรณีที่ไม่สามารถหาแบบจำลองของพลาเน็ต อาจเลือก k ให้มีค่ามากเพียงพอเพื่อชดเชยกับความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ แต่ก็ย่อมส่งผลให้สัญญาณควบคุมที่ใช้มีขนาดใหญ่ตามไปด้วย

3.2 Sliding Phase

เป็นการเคลื่อนที่ของแนววิถีของระบบภายในชั้นขีดผิว $\{|\sigma| \leq c\}$ ของพื้นผิวแผนเลื่อน $\sigma=0$ ซึ่งจะต้องออกแบบให้ $\sigma=0$ มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable: AS) เป็นอย่างน้อย จึงจะทำให้สแตตของระบบที่อยู่บนชั้นขีดผิว $\{|\sigma| \leq c\}$ เคลื่อนที่เข้าสู่จุดกำเนิด เนื่องจาก $\sigma = \sigma(x) = ax_1 + x_2 = 0$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสแตตทุกตัว และอยู่ในรูปของพื้นผิวที่ผ่านจุดกำเนิด นั่นคือยอมให้สแตตทุกตัวที่อยู่บนพื้นผิวนี้นี้เข้าสู่ศูนย์ได้ ดังนั้นในขั้นตอนนี้จะสมมติว่าแนววิถีของระบบอยู่บนพื้นผิวแผนเลื่อน $\sigma=0$ ได้อย่างสมบูรณ์ พลวัตของระบบบน $\sigma=0$ จึงเป็น $\dot{x}_1 = -ax_1$ (แทนค่า $x_2 = \dot{x}_1$) นั่นคือ เสถียรภาพของระบบจะขึ้นอยู่กับการค่าพารามิเตอร์ a ของพื้นผิว ซึ่งหากออกแบบให้พหุนาม $\sigma(x) = ax_1 + x_2 = 0$ เป็นเฮอริวิตซ์ (Hurwitz) กล่าวคือ $a > 0$ จะทำให้ $x_1 \rightarrow 0$ เมื่อ $t \rightarrow \infty$ ผลที่ตามมาคือ $x_2 \rightarrow 0$ ที่เวลาเดียวกันด้วยซึ่งเป็นเสถียรภาพแบบยกกำลัง (exponentially stable: ES) ดังนั้นสแตตทุกตัวของระบบที่อยู่บน $\sigma=0$ จะเข้าหาจุดกำเนิด

มีข้อสังเกตตรงนี้คือ เมื่อแทนค่าสมการสแตต $\dot{x}_1 = x_2$ ลงใน $\sigma = ax_1 + x_2 = 0$ ซึ่งไม่ถูก u ควบคุมโดยตรงนั้น จะสอดคล้องกับเงื่อนไข Matching Condition ของพจน์ความไม่แน่นอน h, g ซึ่งไม่สามารถอยู่บนสมการสแตตที่ไม่ถูกควบคุมโดยตรง (ในที่นี้คือ $\dot{x}_1 = x_2$)

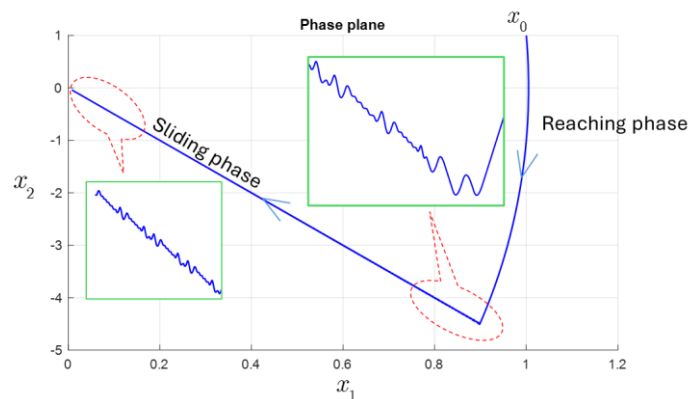


รูปที่ 1 โครงสร้างระบบควบคุมแบบ VSCS ด้วยตัวควบคุมแบบ SMC

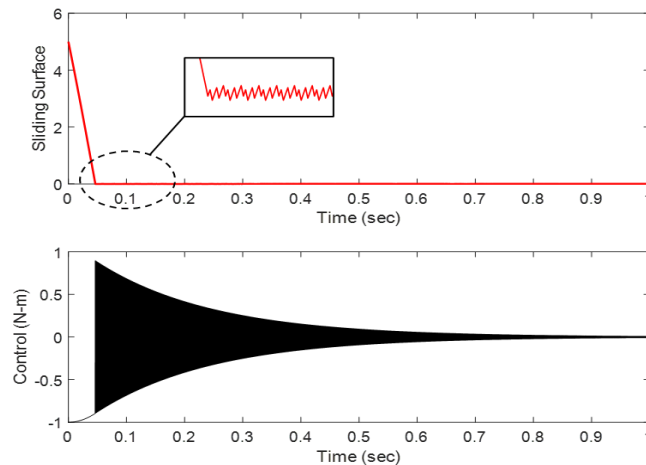
(ภาพดาวเทียมของ NASA ที่ติดตั้งระบบขับเคลื่อน (satellite with propulsion system))

ที่มา: <https://www.flickr.com/photos/nasahqphoto/8635588652/>

การแสดงแนววิถีบนระนาบสถานะเมื่อใช้ตัวควบคุม SMC ในอุดมคติจะใช้พลาเนตดาวเทียมที่มีระบบขับเคลื่อน (satellite with propulsion system) ดังรูปที่ 1 ซึ่งมีแบบจำลองอย่างง่าย (Zak, 2003) เป็น $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = (1/J)u$ โดยที่ $J = 100 \text{ kg-m}^2$ ผลการจำลองด้วยโปรแกรม Matlab จากรูปที่ 2 จะเห็นว่าภาพ Phase portrait แสดงแนววิถีจากสเตตเริ่มต้น $x_0 = (1, 1)^T$ เคลื่อนที่เข้าหาพื้นผิว $\sigma = 0$ ในช่วง Reaching phase และจะเคลื่อนที่แบบซิกแซก (zig-zag motion) หรือสั่น (oscillate) สลับไป-มาข้ามพื้นผิวแผนเลื่อน $\sigma = 0$ (จึงเรียกพฤติกรรมนี้ว่า “Sliding Mode”) โดยคงอยู่ภายในชั้นขีดผิว $\{|\sigma| \leq c\}$ ตลอดการเคลื่อนที่ในช่วง Sliding phase จนเข้าสู่จุดกำเนิด การสั่นนี้จะมีขนาดใหญ่เมื่อแนววิถีเริ่มเข้าสู่พื้นผิวแผนเลื่อนและสั่นลดลงเมื่อเข้าใกล้จุดสมดุล (equilibrium point) ซึ่งเป็นจุดกำเนิด



รูปที่ 2 Phase portrait ของแนววิถีเมื่อใช้ตัวควบคุม SMC ในอุดมคติ



รูปที่ 3 ปรากฏการณ์ “chattering” จากตัวควบคุม SMC ในอุดมคติ

รูปที่ 3 แสดงการทำงานแบบสวิตช์ของตัวควบคุม SMC ในอุดมคติซึ่งใช้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง sgn (ไม่ต่อเนื่องที่จุดศูนย์) ทำให้ในช่วง Sliding phase มีการสวิตช์สลับไป-มาด้วยความถี่สูงมาก ๆ ระหว่าง $\sigma < 0$ กับ $\sigma > 0$ ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า “chattering” ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่ไม่ต้องการ เนื่องจากในทางปฏิบัติอาจไปสร้างความร้อนสูญเสียให้กับวงจรไฟฟ้าของระบบควบคุม ทำให้ตัวขับเคลื่อน (actuator) เสียหาย รวมถึงเกิดการสึกหรอของชิ้นส่วนทางกลที่มีการเคลื่อนที่ด้วยความถี่สูง อีกทั้งยัง

อาจไปกระตุ้นพลวัตที่ไม่ต้องการได้ในบางระบบที่ช่วงความถี่สูงซึ่งทำให้ประสิทธิภาพการควบคุมลดลง ในทางปฏิบัติจึงหลีกเลี่ยงการใช้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง sgn ในกฎการควบคุม SMC

4. ขอบเขตการดึงดูดของตัวควบคุม SMC ในอุดมคติ

เนื่องจากตัวควบคุม SMC ในอุดมคติไม่สามารถทำให้แนววิถีของระบบคงอยู่บนพื้นผิวแผนเลื่อน $\sigma = 0$ ได้ตลอดเวลา แต่จากเงื่อนไข $\sigma \dot{\sigma} \leq -g_0 \beta_0 |\sigma|$ ทำให้ได้ว่าแนววิถีที่กำลังเคลื่อนที่ในช่วง Sliding phase จะอยู่ภายในชั้นขีดผิว $\{|\sigma| \leq c\}$ ซึ่งเป็นอาณาบริเวณจำกัดหรือย่านใกล้เคียง (neighborhood) ของ $\sigma = 0$ ได้เท่านั้น ดังนั้นจึงสามารถสร้างเซตยีนยงบวก (positively invariant) ได้จากชั้นขีดผิว $\{|\sigma| \leq c\}$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง ทุกแนววิถีที่เข้าสู่ชั้นขีดผิวจะคงอยู่ภายในเซตนั้นตลอดไป

การประมาณขอบเขตการดึงดูด (estimation of region of attraction)⁵ ที่อยู่ภายในชั้นขีดผิว $\{|\sigma| \leq c\}$ เริ่มจากพิจารณาสมการพลวัตของชั้นขีดผิวในรูป $\dot{x}_1 = x_2 = -ax_1 + \sigma$ เสถียรภาพของแนววิถีภายในชั้นขีดผิว พิจารณาจากฟังก์ชันเลียปูนอฟ $V_0 = (1/2)x_1^2$ จะได้

$$\dot{V}_0 = x_1 \dot{x}_1 = -ax_1^2 + x_1 \sigma \leq -ax_1^2 + |x_1| c \leq 0, \quad \forall |x_1| \geq \frac{c}{a}$$

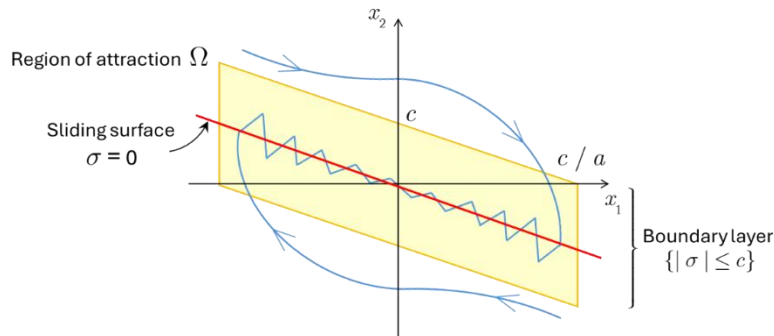
นั่นคือ

$$|x_1(0)| \leq \frac{c}{a} \Rightarrow |x_1(t)| \leq \frac{c}{a}, \quad \forall t \geq 0$$

ดังนั้น

$$\Omega = \left\{ |x_1| \leq \frac{c}{a}, |\sigma| \leq c \right\}$$

เป็นเซตยีนยงบวก (ดูรูปที่ 4)



รูปที่ 4 ขอบเขตของการดึงดูดเมื่อใช้ตัวควบคุม SMC ในอุดมคติ

ทุกแนววิถีที่เริ่มต้นในเซต Ω จะคงอยู่ภายในเซตนั้นตลอดไป (นอกจากนั้นยังจะเข้าสู่จุดกำเนิดเมื่อ $t \rightarrow \infty$) หรือกล่าวอีกอย่างได้ว่าแนววิถีที่กำลังเคลื่อนที่แบบฟันปลาข้ามพื้นผิวแผนเลื่อนกลับไป-มาจะสั่นอยู่ภายในเซตยีนยงบวก Ω และหากเลือกให้ c มีขนาดใหญ่เพียงพอแล้ว จะสามารถหาเซตกระชับ (compact set)⁶ ใด ๆ (เซตปิดและมีขอบเขต (closed and bounded set) ซึ่งเป็นเซตย่อยของเซตยีนยงบวก Ω ได้ นอกจากนั้น ถ้าค่าเกน k ของตัวควบคุมซึ่งเลือกจากเงื่อนไข

⁵ ชื่อเรียก “ขอบเขตของการดึงดูด (region of attraction)” อาจเรียกได้หลายแบบ เช่น “โดเมนของการดึงดูด (domain of attraction)” หรือ “basin”

⁶ สมบัติประการหนึ่งของเซตกระชับจากทฤษฎีบทไฮเนโบเรล (The Heine-Borel theorem) คือเป็นเซตปิด (closed) และมีขอบเขต (bounded)

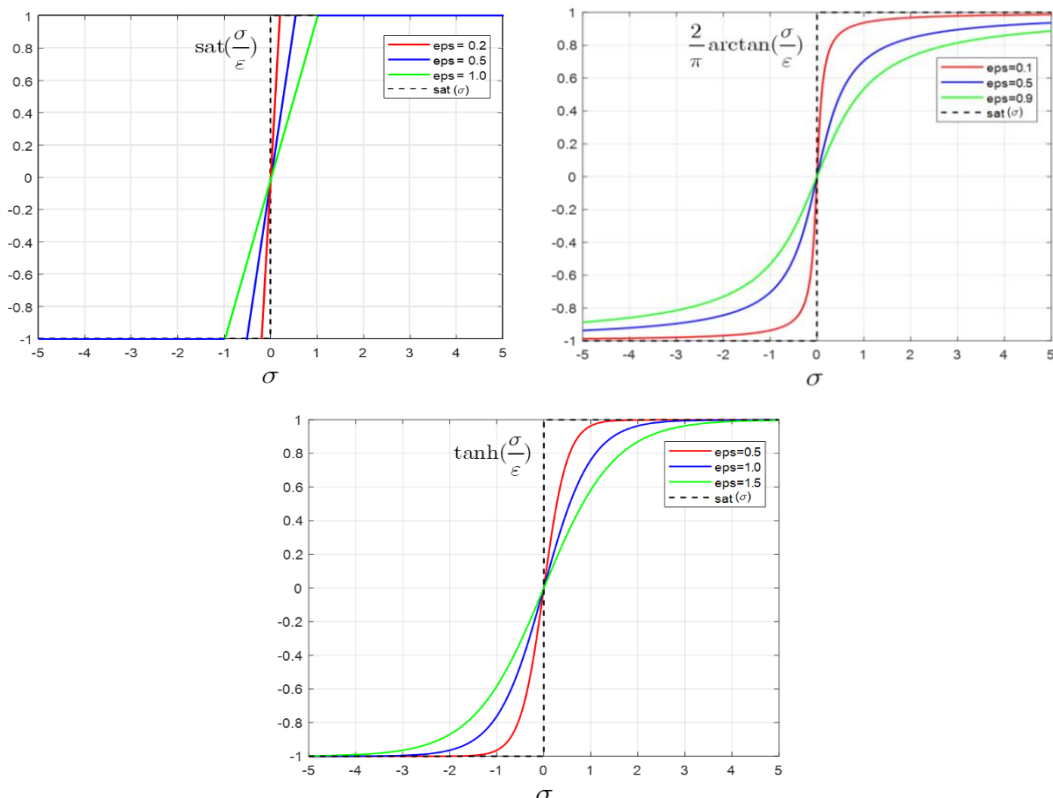
$|ax_2 + h(x)|/|g(x)| \leq k_1, \forall x \in \Omega$ โดยที่ $k \gg k_1$ แล้วจะได้กฎการควบคุม SMC มีลักษณะเป็น การรักษาสถานะกึ่งวงกว้าง (semiglobal stabilization) กล่าวคือ ขอบเขตของการดึงดูดสามารถกำหนดได้จากเซตกระชับใด ๆ ซึ่งขึ้นกับค่าเกนของตัวควบคุมที่ใช้

5. การนำตัวควบคุม SMC ไปใช้งาน

เมื่อนำตัวควบคุม SMC ไปใช้งาน (implementation) จะต้องแก้ไขปัญหาการสั่น (chattering) ที่เกิดขึ้นในขั้นตอน Sliding phase เนื่องจากกฎการควบคุม SMC ในอุดมคติใช้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง sgn ซึ่งอาจทำให้ระบบควบคุมเสียหายได้แนวทางแก้ปัญหาคือการใช้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีลักษณะคล้ายกันเพื่อแก้ปัญหาคือการสั่น เช่น ฟังก์ชันอิ่มตัว (saturation function: sat) ฟังก์ชันผกผันแทนเจนต์ (inverse tangent: $\arctan$) หรือฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (hyperbolic tangent: $\tanh$) ดังรูปที่ 5 เป็นต้น โดยดัดแปลงฟังก์ชันต่อเนื่องเหล่านี้ด้วยพจน์ ε (ค่าคงตัวน้อย ๆ) เพื่อแก้ไขรูปร่างให้กราฟมีความชันสูงใกล้เคียงกับฟังก์ชัน sgn (ดังรูปที่ 4) ข้อดีของวิธีนี้คือไม่จำเป็นต้องอาศัยแบบจำลองของพลาเน็ต แต่ค่าเกน k ของตัวควบคุมอาจเลือกโดยวิธีลองผิดลองถูก (trial-and-error) จึงอาจกล่าวได้ว่าตัวควบคุม SMC เป็นตัวควบคุมที่ไม่อาศัยแบบจำลอง (model-free controller)

5.1 กรณีที่ไม่ทราบแบบจำลองของพลาเน็ต

ทำโดยแทนฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง sgn ด้วยฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีลักษณะคล้ายกันเพื่อแก้ปัญหาคือการสั่น เช่น ฟังก์ชันอิ่มตัว (saturation function: sat) ฟังก์ชันผกผันแทนเจนต์ (inverse tangent: $\arctan$) หรือฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (hyperbolic tangent: $\tanh$) ดังรูปที่ 5 เป็นต้น โดยดัดแปลงฟังก์ชันต่อเนื่องเหล่านี้ด้วยพจน์ ε (ค่าคงตัวน้อย ๆ) เพื่อแก้ไขรูปร่างให้กราฟมีความชันสูงใกล้เคียงกับฟังก์ชัน sgn (ดังรูปที่ 4) ข้อดีของวิธีนี้คือไม่จำเป็นต้องอาศัยแบบจำลองของพลาเน็ต แต่ค่าเกน k ของตัวควบคุมอาจเลือกโดยวิธีลองผิดลองถูก (trial-and-error) จึงอาจกล่าวได้ว่าตัวควบคุม SMC เป็นตัวควบคุมที่ไม่อาศัยแบบจำลอง (model-free controller)



รูปที่ 5 เปรียบเทียบลักษณะของฟังก์ชันซิกนัมกับ ฟังก์ชันอิ่มตัว ฟังก์ชันผกผันแทนเจนต์ และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ ที่มีความชันสูง

โดยที่ ฟังก์ชันอิ่มตัวที่มีความชันสูง: $\text{sat}(y/\varepsilon) = \begin{cases} y/\varepsilon, & |y| \leq \varepsilon \\ \text{sgn}(y/\varepsilon), & |y| > \varepsilon \end{cases}$

ฟังก์ชันผกผันแทนเจนต์: $(2/\pi)\arctan(y/\varepsilon) \rightarrow \text{sgn}(y)$ เมื่อ $\varepsilon \rightarrow 0$

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิคแทนเจนต์: $\tanh(y/\varepsilon) \rightarrow \text{sgn}(y)$ เมื่อ $\varepsilon \rightarrow 0$

5.2 กรณีที่ทราบแบบจำลองของพลาเน็ต

แนวทางนี้จะให้ประสิทธิภาพการควบคุมที่ดีกว่าแบบแรก เนื่องจากใช้ข้อมูลจากแบบจำลองของพลาเน็ต (ซึ่งมีความใกล้เคียงกับพลาเน็ตจริงระดับหนึ่ง) โดยแบ่งกฎการควบคุมออกเป็น 2 ส่วนคือ 1) การควบคุมสมมูล (equivalent control: u_{eqv}) อาศัยข้อมูลแบบจำลองของพลาเน็ต สมมติให้ $\hat{h}, \hat{g}$ เป็นพารามิเตอร์ระบุ (nominal parameters) ซึ่งใช้ออกแบบ (ทราบค่า) สมัยกับ h, g ของพลาเน็ตจริง (ไม่ทราบค่า) ตามลำดับ u_{eqv} อาศัยการหักล้างพจน์ $\hat{h}, \hat{g}$ ออกจากระบบ กับ 2) การควบคุมแบบสวิตช์ (switching control: u_{snc}) ซึ่งใช้กฎการควบคุม SMC ได้ทั้งแบบอุดมคติและแบบฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น กฎการควบคุม SMC ทั้งสองส่วนอยู่ในรูป

$$u = u_{\text{eqv}} + u_{\text{snc}} \quad \text{โดยที่} \quad u_{\text{eqv}} = -\frac{[ax_2 + \hat{h}(x)]}{\hat{g}(x)}$$

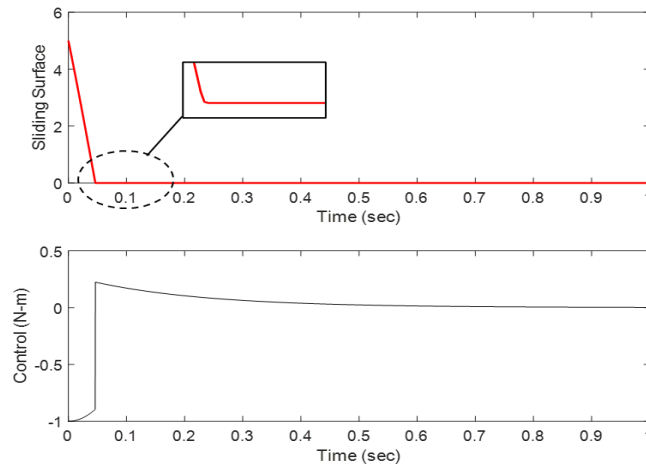
เป็นผลให้ในขั้นตอน Reaching phase:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= ax_2 + h(x) + g(x)u \\ &= ax_2 + h(x) - g(x)\frac{[ax_2 + \hat{h}(x)]}{\hat{g}(x)} + g(x)u_{\text{snc}} \\ &= a\left[1 - \frac{g(x)}{\hat{g}(x)}\right]x_2 + h(x) - \frac{g(x)}{\hat{g}(x)}\hat{h}(x) + g(x)u_{\text{snc}} \\ &= \delta(x) + g(x)u_{\text{snc}} \end{aligned}$$

โดยที่ $\delta(x) \triangleq a[1 - g(x)/\hat{g}(x)]x_2 + h(x) - [g(x)/\hat{g}(x)]\hat{h}(x)$ เป็นพจน์การรบกวน (perturbation term) สอดคล้องกับเงื่อนไข $|\delta(x)/g(x)| \leq \varrho(x)$ ทำให้

$$\sigma\dot{\sigma} = \sigma\delta(x) + g(x)\sigma u_{\text{snc}} \leq \sigma\varrho(x) + g(x)\sigma u_{\text{snc}} = \sigma g(x) \varrho(x) + u_{\text{snc}}$$

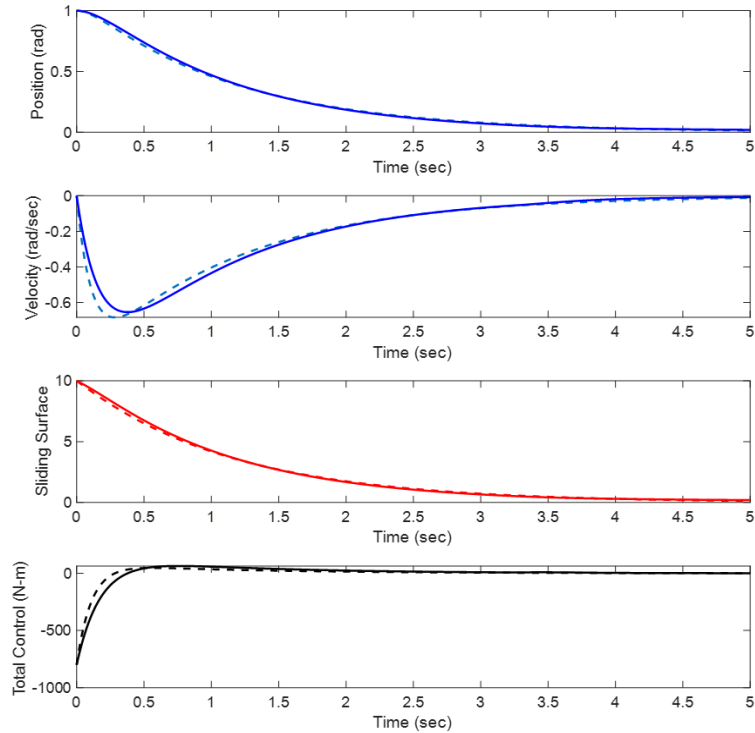
ในส่วนของ u_{snc} อาจใช้แบบฟังก์ชัน sat หรือฟังก์ชันต่อเนื่องอื่นที่มีความชันสูงก็ได้ สังเกตว่าการเลือก $\beta(x) \geq \varrho(x) + \beta_0$ เมื่อ ϱ เป็นค่าขอบเขตบนจาก $|\delta(x)/g(x)| \leq \varrho(x)$ จะเห็นได้ชัดว่า $|\delta(x)| < |ax_2 + h(x)|$ ด้วยวิธีนี้ จึงทำให้ขนาดของ u_{snc} ลดลงโดยทำหน้าที่จัดการเฉพาะพลวัตส่วนที่มีความไม่แน่นอนเท่านั้น ส่งผลให้การสั่นลดลง จึงลดภาระการทำงานของตัวควบคุมด้วย



รูปที่ 6 พื้นผิวแผนเลื่อนและสัญญาณควบคุม SMC แบบฟังก์ชันต่อเนื่อง sat ที่ $\varepsilon = 0.1$

รูปที่ 6 แสดงให้เห็นว่ากฎการควบคุมที่ออกแบบตามแนวทางที่ 2 คือ $u = u_{eqv} + u_{smc}$ โดยที่ u_{smc} ใช้ฟังก์ชันต่อเนื่อง sat ที่มีความชันสูง ($\varepsilon = 0.1$) พบว่าสามารถจัดการปัญหาการสั่นของสัญญาณควบคุมได้ ในทางปฏิบัติ ε อาจมีค่ามากถึงประมาณ $\varepsilon \approx 1$ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับเสถียรภาพของระบบที่ควบคุม อย่างไรก็ตาม การเลือกใช้ ε จะมีผลต่อขนาดของ u_{smc} เมื่อใช้ ε ค่าสูง ($\varepsilon \approx 1$) แม้สามารถจัดการปัญหาการสั่นได้ และได้ u_{smc} มีขนาดน้อยกว่า แต่เสี่ยงทำให้ระบบไร้เสถียรภาพ (unstable) ในทางกลับกัน หากใช้ ε ค่าต่ำ ๆ (แต่ไม่ต่ำเกินไปจนเกิด chattering) จะได้ u_{smc} มีขนาดใหญ่กว่า แต่ก็ประกันเสถียรภาพของระบบได้มากกว่า เราจะกล่าวถึงประเด็นนี้อีกครั้งในหัวข้อขอบเขตการดึงดูด

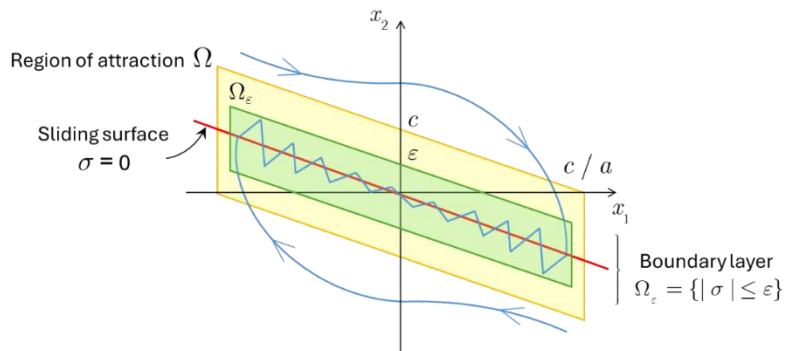
เมื่อจำลองการควบคุมกับพลาเน็ต $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = (1/J)u$ ซึ่งมีสเตตเริ่มต้น $x_0 = (1, 0)^T$ ค่าพารามิเตอร์ระบุของพลาเน็ตเป็น $\hat{J} = 100$ และให้ $J = \hat{J} + \Delta J = 1.5\hat{J}$ เป็นพารามิเตอร์ที่รวมพจน์ความไม่แน่นอน 50% จะได้ผลตอบสนองแสดงดังรูปที่ 7 โดยการใช้การควบคุมสมมูล $u_{eqv} = -aJx_2$ ร่วมกับตัวควบคุม SMC แบบต่อเนื่อง $u_{smc} = -ksat(\sigma/\varepsilon)$ เมื่อออกแบบพื้นผิวแผนเลื่อนเป็น $\sigma = 10x_1 + x_2$ ค่าเกน $k = 8J$ และกำหนดให้ $\varepsilon = 0.5$ จะพบว่าทั้งพลาเน็ตที่ไม่มีความคลาดเคลื่อน ($\Delta J = 0$) และพลาเน็ตที่มีความคลาดเคลื่อน ($\Delta J = 0.5\hat{J}$) สามารถเคลื่อนที่กลับมายังจุดสมดุลซึ่งที่ตำแหน่ง (x_1) และความเร็ว (x_2) เป็นศูนย์ได้โดยใช้ขนาดสัญญาณควบคุมไม่เกิน 800 N-m อย่างไรก็ตาม สามารถปรับปรุงให้ผลตอบสนองเร็วขึ้นได้โดยเพิ่มค่าเกน k ซึ่งผลที่ตามมาคือสัญญาณควบคุมที่ใช้จะมีขนาดใหญ่ตามไปด้วย



รูปที่ 7 เปรียบเทียบผลการควบคุมระหว่างฟลานต์ที่ไม่ความคลาดเคลื่อน (เส้นประ) กับฟลานต์ที่มีความคลาดเคลื่อน (เส้นเต็ม)

6. ขอบเขตการดึงดูดของตัวควบคุม SMC แบบต่อเนื่อง

เมื่อใช้กฎการควบคุม SMC แบบต่อเนื่อง $u_{smc} = -\beta(x)\text{sat}(\sigma/\varepsilon)$ พฤติกรรมของแนววิถีแผนเปลี่ยนจะเคลื่อนที่แบบสั่นอยู่ภายในชั้นขีดผิวซึ่งกำหนดจาก $\text{sat}(\sigma/\varepsilon)$ นั่นคือ สลับการทำงานในช่วง $-\varepsilon \leq \sigma < 0$ และ $0 < \sigma \leq \varepsilon$ ทำให้เกิดชั้นขีดผิว $\{|\sigma| \leq \varepsilon\}$ ดังรูปที่ 8



รูปที่ 8 ขอบเขตของการดึงดูดเมื่อใช้ตัวควบคุม SMC แบบฟังก์ชันต่อเนื่อง sat

การวิเคราะห์ขั้นตอน Reaching phase ซึ่งเป็นภายนอกชั้นขีดผิว $\{|\sigma| > \varepsilon\}$ จะคล้ายกับกรณีของตัวควบคุม SMC ในอุดมคติ กล่าวคือ ให้ $V_\sigma = (1/2)\sigma^2$ เป็นฟังก์ชันเลียปูนอฟ จะได้ว่า $\dot{V}_\sigma \leq -g_0\beta_0|\sigma|$ นั่นคือ $|\sigma(t)|$ จะลดลงโดยแท้ (strictly decreasing) แนววิถีของระบบที่เริ่มต้นจากภายนอกชั้นขีดผิว $|\sigma(0)| > \varepsilon$ จะเคลื่อนที่เข้าสู่ชั้นขีดผิว $\{|\sigma| \leq \varepsilon\}$ ในเวลาจำกัด และคงอยู่ภายในเซตนั้นตลอดไป ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

- 1) ถ้าให้ $c \geq \varepsilon$ จะได้ว่า มีเซตย่อย $\Omega_\varepsilon = \{|\sigma| \leq \varepsilon\} \subset \Omega$ เป็นชั้นขีดผิว

2) เนื่องจาก Ω เป็นเซตยีนยงบวก ดังนั้น Ω_ε จึงเป็นเซตยีนยงบวกด้วย

การวิเคราะห์ขั้นตอน Sliding phase พลวัตของระบบภายในชั้นขีดผิว $\{|\sigma| \leq \varepsilon\}$ กำหนดโดย $\dot{x}_1 = -ax_1 + \sigma$, $\sigma \neq 0$ ให้ $V_1 = (1/2)x_1^2$ เป็นฟังก์ชันเลียปูนอฟ จะได้

$$\dot{V}_1 = -ax_1^2 + x_1\sigma \leq -ax_1^2 + |x_1|\varepsilon \leq -(1-\theta)ax_1^2, \quad \forall |x_1| \geq \frac{\varepsilon}{a\theta} \quad \text{โดยที่ } 0 < \theta < 1$$

ดังนั้น จึงสรุปว่าแนววิถีจะเข้าสู่เซตยีนยงบวก Ω_ε ในเวลาจำกัด โดยที่

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ |x_1| \leq \frac{\varepsilon}{a\theta}, |\sigma| \leq \varepsilon \right\} \subset \Omega$$

ในที่นี้เพียงพอที่จะสรุปได้ว่า การควบคุมแบบ SMC สำหรับระบบไม่เชิงเส้น Σ จาก (1) ไม่ให้เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (AS) ของจุดกำเนิด แต่ให้ผลเฉลยหรือแนววิถีมีขอบเขตถึงที่สุด (ultimately bounded) รอบจุดกำเนิดด้วยค่าของเขต (ultimate bound) เท่ากับ $\varepsilon/(a\theta)$ ซึ่งสามารถทำให้น้อยลงได้โดยลดค่า ε

7. เสถียรภาพของจุดสมดุลเมื่อใช้ตัวควบคุม SMC แบบต่อเนื่อง

จากการออกแบบการควบคุมแบบ SMC จะเห็นว่าสมการสแตเดียมของระบบไม่เชิงเส้น Σ ลดรูปเป็นสมการพลวัตของพื้นผิวแผนเลื่อน กล่าวคือ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = h(x) + g(x)u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + \sigma = x_2 \\ \dot{\sigma} = ax_2 + h(x) + g(x)u \end{cases} \quad (2)$$

เมื่อพิจารณาภายในชั้นขีดผิว $\{|\sigma| \leq \varepsilon\}$ จะได้ว่ากฎการควบคุม SMC ลดรูปเป็นการควบคุมเชิงเส้น $u_{\text{smc}} = -\beta(x)\text{sat}(\sigma/\varepsilon) = -\beta(x)\sigma/\varepsilon$, $\forall |\sigma| \leq \varepsilon$ เมื่อแทนค่า u_{smc} ลงใน (2) จะได้ระบบปิด (ภายในชั้นขีดผิว $\{|\sigma| \leq \varepsilon\}$) กำหนดโดย

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + \sigma = x_2 \\ \dot{\sigma} = ax_2 + h(x) - g(x)\beta(x)\frac{\sigma}{\varepsilon} \end{cases} \quad (3)$$

หาจุดสมดุล $(\bar{x}_1, \bar{\sigma})^T$ ของระบบปิด (3) โดยกำหนดให้ $(\dot{x}_1, \dot{\sigma})^T = (0, 0)^T$ จะได้

$$\begin{cases} 0 = -a\bar{x}_1 + \bar{\sigma} = x_2 \\ 0 = a\bar{x}_2 + h(\bar{x}) - g(\bar{x})\beta(\bar{x})\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon} \end{cases}$$

ดังนั้น $\bar{\sigma} = a\bar{x}_1$ และ $\bar{x}_1/\varepsilon \triangleq \phi(x_1) = h(x)/ag(x)\beta(x)|_{x_2=0}$ หรือ $\bar{x}_1 = \varepsilon\phi(x_1)$ (สมมติว่ามีรากค่าเดียว) จึงเป็นจุดสมดุลเพียงจุดเดียวของระบบปิด

กรณีที่ $h(0) = 0$ จะได้ว่า $(\bar{x}_1, \bar{\sigma})^T = (0, 0)^T$ ระบบมีจุดสมดุลที่จุดกำเนิด สำหรับกรณีที่ทั่วไปซึ่ง $(\bar{x}_1, \bar{\sigma})^T = (\varepsilon\phi(x_1), a\bar{x}_1)^T \neq (0, 0)^T$ (จุดสมดุลไม่ได้อยู่ที่จุดกำเนิด) จะต้องย้าย $(\bar{x}_1, \bar{\sigma})^T$ ให้ไปอยู่ที่จุดกำเนิด โดยเปลี่ยนตัวแปรให้ $z_1 \triangleq x_1 - \bar{x}_1$ และ $z_2 \triangleq \sigma - \bar{\sigma}$ จะได้

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -ax_1 + \sigma = -az_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = ax_2 + h(x) - g(x)\beta(x)\frac{\sigma}{\varepsilon} \\ \quad = a(z_2 - az_1) + h(x) - g(x)\beta(x)\frac{z_2 + a\bar{x}_1}{\varepsilon} \\ \quad = l(z) - g(x)\beta(x)\frac{z_2}{\varepsilon} \end{cases} \quad (4)$$

โดยที่ $l(z) \triangleq a(z_2 - az_1) + ag(x)\beta(x)\left[\frac{h(x)}{ag(x)\beta(x)} - \frac{\bar{x}_1}{\varepsilon}\right]$, $l(0) = 0$ และ $|l(z)| \leq l_1|z_1| + l_2|z_2|$ เสถียรภาพของจุดสมดุลของระบบปิด (4) วิเคราะห์โดยใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟ $V(z) = (1/2)\|z\|_2^2$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &= z_1(-az_1 + z_2) + z_2\left[l(z) - g(x)\beta(x)\frac{z_2}{\varepsilon}\right] \leq -az_1^2 + (1+l_1)|z_1||z_2| + l_2z_2^2 - \frac{g_0\beta_0}{\varepsilon}z_2^2 \\ &= -\begin{bmatrix} |z_1| \\ |z_2| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} a & -\frac{1}{2}(1+l_1) \\ -\frac{1}{2}(1+l_1) & \left(\frac{g_0\beta_0}{\varepsilon} - l_2\right) \end{bmatrix}}_{\triangleq Q} \begin{bmatrix} |z_1| \\ |z_2| \end{bmatrix} \end{aligned}$$

โดยที่

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} a & -\frac{1}{2}(1+l_1) \\ -\frac{1}{2}(1+l_1) & \frac{g_0\beta_0}{\varepsilon} - l_2 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งมี} \quad \det(Q) = a\left(\frac{g_0\beta_0}{\varepsilon} - l_2\right) - \frac{1}{4}(1+l_1)^2$$

$\dot{V}(z) < 0, \forall z \neq \{0\}$ ก็ต่อเมื่อ $Q > 0$ นั่นคือ Q เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (strictly positive matrix) นั่นคือ ต้องเลือกให้ ε เป็นค่าน้อย ๆ โดยที่ $\varepsilon < ag_0\beta_0 / [(1+l_1)^2 / 4 + l_2]$ และเนื่องจากจุดสมดุลของระบบปิด (4) มีเพียงจุดเดียวที่จุดกำเนิด และ $V(z) \rightarrow \infty$ เมื่อ $\|z\| \rightarrow \infty$ ($V(z)$ ไม่มีขอบเขตตามรัศมี (radially unbounded)) จึงสรุปได้ว่าจุดกำเนิดมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับวงกว้าง (globally asymptotically stable: GAS) เป็นผลให้จุดสมดุล $(\bar{x}_1, \bar{\sigma})^T$ ของระบบปิด (4) มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับวงกว้างด้วย นอกจากนั้น ในกรณีที่ $h(0) = 0$ จะได้ว่า $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (0, 0)^T$ และกรณีที่ $h(0) \neq 0$ จะได้ว่า $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (\bar{x}_1, 0)^T = (\varepsilon\phi(x_1), 0)^T$

8. สรุปผลและวิจารณ์

บทความนี้ต้องการแนะนำการออกแบบและการวิเคราะห์ตัวควบคุมแบบแผนเลื่อน (SMC) กับระบบไม่เชิงเส้นอันดับที่สองซึ่งพารามิเตอร์มีความไม่แน่นอน ระบบพลวัตภายใต้การควบคุม SMC นี้เรียกว่าระบบ VSC ตัวควบคุม SMC ในอุดมคติทำงานโดยอาศัยฟังก์ชันการสวิตช์ sgn และกฎการตัดสินใจในรูปของพื้นผิวแผนเลื่อน $\sigma = 0$ การทำงานของตัวควบคุมประกอบด้วย Reaching phase: เป็นการทำให้สเตตเริ่มต้นของระบบเคลื่อนที่เข้าหาพื้นผิวแผนเลื่อนในเวลาจำกัด และ

Sliding phase: เป็นพลวัตของสแตตบนพื้นผิวแผ่นเลื่อนซึ่งเคลื่อนที่แบบซิก-แซก การออกแบบพื้นผิวแผ่นเลื่อนให้มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (AS) เป็นอย่างน้อยจะทำให้สแตตของระบบลู่เข้าสู่จุดกำเนิด การทำงานของกฎการควบคุม SMC ซึ่งสวิตช์สลับไป-มาข้ามพื้นผิวแผ่นเลื่อน ทำให้สามารถประมาณขอบเขตการดึงดูดได้จากพลวัตภายในชั้นขีดผิวทั้งกรณีที่ใช้ SMC ในอุดมคติ และแบบฟังก์ชันต่อเนื่อง sat อีกทั้งปรากฏการณ์ chattering ที่เกิดขึ้นยังสามารถขจัดได้โดยใช้ฟังก์ชันต่อเนื่องดังกล่าว นอกจากสมบัติคงทนและการออกแบบที่ไม่ซับซ้อนของตัวควบคุม SMC แล้วยังสามารถพิสูจน์ได้อีกว่าจุดสมดุลของระบบปิดมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับวงกว้าง (GAS)

9. เอกสารอ้างอิง

- [1] DeCarlo, R. A., Zak, S. H. & Matthews, G. P. (1988). Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. In: *Proceedings of the IEEE*, 76 (3), p. 212-32.
- [2] Derbel, N., Ghommam, J., & Zhu, Q. (Eds.). (2019). *New Developments and Advances in Robot Control*. Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd.
- [3] Fossard, A. J. & Floquet, T. (2002). Introduction: An Overview of Classical Sliding Mode Control. In: Perruquetti, W. & Barbot, J. P. editors. *Sliding mode control in engineering* (p. 1-28). New York: Marcel Dekker, Inc.
- [4] Khalil, H. K. (2014). *Nonlinear systems* (3rd ed.). USA: Pearson.
- [5] Sastry, S. (1999). *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*. New York: Springer.
- [6] Slimen, A., Tlijani, H., Dhaoui, M., & Younes, R. B. (2019). Control of Wind Turbine Based on PMSG Using Pitch Angle Control. In: Derbel, N. & Zhu, Q. editors. *Modeling, Identification and Control Methods in Renewable Energy Systems* (p. 151-165). Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd.
- [7] Utkin, V. I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. USA: Springer.
- [8] Zak, S. H. (2003). *Systems and Control*. New York: Oxford University Press.



ประวัติผู้เขียนบทความ

ผศ. ดร.อิทธิเดช มูมั่งมี ตำแหน่ง อาจารย์ประจำหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช 9/9 หมู่ 9 ถ.แจ้งวัฒนะ ต.บางพูด อ.ปากเกร็ด จ.นนทบุรี 11120 โทรศัพท์ 02-5048191-3
E-Mail: ittidej.moos@stou.ac.th

งานวิจัยที่สนใจ: Nonlinear control theory, Vibration control, Hybrid dynamical control systems