บทความวิจัย

คาบของฟังก์ชันฟีโบนักชีมอดุโล m

Periods of Fibonacci Functions Modulo m

นัฏภร ทองงาม[1] และรณสรรพ์ ชินรัมย์[2,*]

Nattaporn Thongngam[1] and Ronnason Chinram[2,*]

บทคัดย่อ

ฟังก์ชันฟีโบนักชี คือ ฟังก์ชัน f: Z → Z โดยที่ f(x+2) = f(x+1) + f(x) สำหรับทุก x∈Z ฟังก์ชันฟีโบนักชีเป็นนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส วัตถุประสงค์ของบทความวิจัยนี้คือศึกษาคาบของฟังก์ชันฟีโบนักชีมอดุโล m และเชื่อมโยงสู่คาบของลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัสมอดุโล m

คำสำคัญ: คาบ คาบปฐมฐาน ฟังก์ชันฟีโบนักชี

Abstract

A Fibonacci function is a function f: Z → Z such that f(x+2) = f(x+1) + f(x) for all x∈Z. A Fibonacci function is a generalization of the Fibonacci sequence and Lucas sequence. The purpose of this research is to study periods of Fibonacci functions modulo m and connect to the period of the Fibonacci sequence and Lucas sequence modulo m

Keywords: Period, Primitive Period, Fibonacci Function

บทนำ

จำนวนฟีโบนักชี (Fibonacci Number) เป็นจำนวนเต็มที่มีชื่อเสียงมากที่สุดแบบหนึ่งในประวัติศาสตร์ ชื่อของจำนวนฟีโบนักชีตั้งขึ้นเพื่อเป็นเกียรติให้กับนักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลีชื่อ เลโอนาร์โดแห่งปีซา (Leonardo de Pisa) ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในนามฟีโบนักชี (Fibonacci) ผู้ที่ได้กล่าวถึงจำนวนดังกล่าวในหนังสือ liner Abaci ที่เขาแต่งขึ้นในปี ค.ศ. 1202 ความสัมพันธ์ของจำนวนฟีโบนักชีเป็นลำดับของจำนวนซึ่งจำนวนถัดไปเกิดจากผลบวกของสองจำนวนก่อนหน้า โดยสองจำนวนแรกคือ 0 และ 1 ตามลำดับ ซึ่งจากความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิดโดยที่

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ และ } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ สำหรับทุก } n > 1$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้น จะได้ลำดับของจำนวนฟีโบนักชีคือ

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

จำนวนฟีโบนักชีมีการศึกษาวิจัยอย่างกว้างขวางสามารถดูรายละเอียดได้ในหนังสือ Koshy [1] ยิ่งไปกว่านั้นตัวอย่างบทความที่เกี่ยวกับจำนวนฟีโบนักชี เช่น ปี พ.ศ. 2552 กัญญานาถ จิสวัสดิ์ และสมใจ จิตพิทักษ์ [2] ได้ศึกษาสมบัติการหารลงตัวบางประการของจำนวนฟีโบนักชีและในปี พ.ศ. 2560 เก่ง วิบูลย์ธัญญ์ [3] ได้นำเสนอวิธีการต่างๆ ในการหาสูตรของลำดับฟีโบนักชี ในทำนองเดียวกันกับจำนวนฟีโบนักชี จำนวนลูคัสเป็นจำนวนที่อยู่ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด โดยที่

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1 \text{ และ } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ สำหรับทุก } n > 1$$

[1] นักศึกษาปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ สงขลา 90110

[2] รศ.ดร. ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ สงขลา 90110

[1] Undergraduate Student, Mathematics major, Faculty of Science, Prince of Songkla University, Hat Yai campus, Songkhla 90100

[2] Assoc. Prof. Dr., Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Prince of Songkla University, Hat Yai campus, Songkhla, 90100

* Corresponding author: Email address: ronnason.c@psu.ac.th Tel. 074-288660

(Received: February 18, 2019; Revised: June 20, 2019; Accepted: July 24, 2019)

จำนวนลูคัสตั้งชื่อตามนักคณิตศาสตร์ เอดูอาร์ด ลูคัส (Édouard Lucas) จากความสัมพันธ์ข้างต้น จะได้ลำดับของจำนวนลูคัส คือ

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, …

ตัวอย่างความสัมพันธ์ของจำนวนฟีโบนักชีและจำนวนลูคัส สามารถดูได้ใน [1], [4] และ [5]

ในปี ค.ศ. 1967 Elmore [6] ได้ใช้ความสัมพันธ์ของจำนวนฟีโบนักชีนี้มาสร้างเป็นฟังก์ชันฟีโบนักชีซึ่งนิยามโดย $f: R \rightarrow R$ โดยที่ $f(x+2) = f(x+1) + f(x)$ สำหรับทุก $x \in R$ ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันฟีโบนักชีสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ใน [7] และ [8]

ในปี ค.ศ. 2018 Jameson [9] ได้นำเสนอบทความวิจัยเกี่ยวกับคาบของจำนวนฟีโบนักชีมอดุโล m และได้ให้สมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับคาบของจำนวนฟีโบนักชี ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ทำการขยายงานวิจัยดังกล่าวไปในกรณีของฟังก์ชันฟีโบนักชี

วัตถุประสงค์

ขยายการศึกษาคาบของจำนวนฟีโบนักชีมอดุโล m ไปสู่ในกรณีฟังก์ชันฟีโบนักชี

วิธีการดำเนินงานวิจัย

เครื่องมือในการดำเนินงานวิจัย

1. ฟังก์ชันฟีโบนักชี

สำหรับในงานวิจัยนี้ จะพิจารณาฟังก์ชันฟีโบนักชี โดย $f: Z \rightarrow Z$ โดยที่ $f(x+2) = f(x+1) + f(x)$ สำหรับทุก $x \in Z$ และ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

หมายเหตุ ในการนิยามฟังก์ชันฟีโบนักชี สามารถนิยามเพียงค่า f(0) และ f(1) สำหรับค่าของ f(a) เมื่อ a เป็นค่าอื่นๆ สามารถใช้สมบัติของฟังก์ชันฟีโบนักชีหาค่าออกมาได้

2. หลักการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

2.1 หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้ม

หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ P(n) แทนข้อความทางคณิตศาสตร์ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า

1) P(1) เป็นจริง

2) สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

แล้วจะได้ว่า P(n) เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้ม

ให้ P(n) แทนข้อความทางคณิตศาสตร์ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า

1) P(1) เป็นจริง และ

2) สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ ถ้า P(m) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $m \leq k$ แล้ว P(k+1) เป็นจริง

แล้วจะได้ว่า P(n) เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

2.2 หลักการช่องนกพิราบ (The Pigeonhole Principle)

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้ามีนกพิราบ k+1 ตัว บินเข้ารัง k รัง แล้วจะมีรังอย่างน้อย 1 รัง ที่มีนกพิราบอย่างน้อย 2 ตัว

2.3 ขั้นตอนวิธีการหาร

ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง a b จะมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวที่ทำให้ $b = aq + r$ โดยที่ $0 \leq r < |a|$

3. วิธีดำเนินงานวิจัย

ศึกษาสมบัติของฟังก์ชันฟีโบนักชี และนิยามคาบของฟังก์ชันฟีโบนักชี พร้อมทั้งให้สมบัติที่สำคัญของคาบของฟังก์ชันฟีโบนักชี พร้อมทั้งพิสูจน์สมบัติทั้งหมดตามหลักการทางคณิตศาสตร์ และสร้างตัวอย่างเชื่อมโยงกับลำดับฟีโบนักชี

ผลการวิจัย

ทฤษฎีบท 1 แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของ $f(-n)$ และ $f(n)$

ทฤษฎีบท 1 ให้ f เป็นฟังก์ชันฟีโบนักชี และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า

1) ถ้า $f(0) = 0$ แล้ว $f(-n) = (-1)^{n+1}f(n)$

2) ถ้า $f(0) = 2f(1)$ แล้ว $f(-n) = (-1)^{n}f(n)$

บทพิสูจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้มในการพิสูจน์

1) ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $f(-n) = (-1)^{n+1}f(n)$

พิจารณา $n = 1$ ได้ว่า $f(-1) = f(1) - f(0) = f(1) = (-1)^{1+1}f(1)$

ทำให้ได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และสมมติว่า $P(m)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $m \leq k$

ดังนั้น $f(-k) = (-1)^{k+1}f(k)$ และ $f(-k+1) = f(-(k-1)) = (-1)^{(k-1)+1}f(k-1)$

จาก $f(-(k+1)) = f(-k-1) = f(-k+1) - f(-k)$

ทำให้ได้ว่า $f(-(k+1)) = (-1)^{(k-1)+1}f(k-1) - (-1)^{k+1}f(k)$

ซึ่งได้ว่า $f(-(k+1)) = (-1)^{(k+1)+1}f(k-1) + (-1)^{(k+1)+1}f(k) = (-1)^{(k+1)+1}f(k+1)$

ทำให้ได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้ม จึงสามารถสรุปได้ว่า $f(-n) = (-1)^{n+1}f(n)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

2) ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $f(-n) = (-1)^{n}f(n)$

พิจารณาเมื่อ $n = 1$ จะได้ว่า $f(-1) = f(1) - f(0) = f(1) – 2f(1) = (-1)f(1) = (-1)^{1}f(1)$

ทำให้ได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และสมมติว่า $P(m)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $m \leq k$

จึงได้ว่า $f(-k) = (-1)^{k}f(k)$ และ $f(-k+1) = f(-(k-1)) = (-1)^{k+1}f(k-1)$

และจาก $f(-(k+1)) = f(-k-1) = f(-k+1) - f(-k)$

ทำให้ได้ว่า $f(-(k+1)) = (-1)^{k+1}f(k-1) - (-1)^{k}f(k)$

และ $f(-(k+1)) = (-1)^{k+1}f(k-1) + (-1)^{k+1}f(k) = (-1)^{k+1}f(k+1)$

ทำให้ได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้ม จึงทำให้สรุปได้ว่า $f(-n) = (-1)^{n}f(n)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

บทแทรกต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นพจน์ของลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัสเมื่อขยายลำดับ โดยใช้โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มโดยใช้ทฤษฎีบท 1 ในการช่วยพิสูจน์

บทแทรก 1 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า

1) $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$

2) $L_{-n} = (-1)^{n}L_n$

บทพิสูจน์ 1) สังเกตว่าลำดับฟีโบนักชีจะสอดคล้องกับเงื่อนไข 1) ในทฤษฎีบท 1 จึงได้ว่า $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$

2) สังเกตว่าลำดับลูคัสจะสอดคล้องกับเงื่อนไข 2) ในทฤษฎีบท 1 จึงได้ว่า $L_{-n} = (-1)^{n}L_n$

ตัวอย่าง 1 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

เมื่อพิจารณา ลำดับฟีโบนักชี (นั่นคือ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$) จะพบว่า

n	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21
$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21

นั่นคือ ลำดับฟีโบนักชี เมื่อพิจารณาบนเซตของจำนวนเต็ม คือ

$$\ldots, -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

พิจารณา ลำดับลูคัส (นั่นคือ $L_0 = 2$ และ $L_1 = 1$) จะได้ว่า

n	1	2	3	4	5	6	7	8
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47
$L_{-n} = (-1)^n L_n$	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47

ดังนั้น ลำดับของจำนวนลูคัส เมื่อพิจารณาบนเซตของจำนวนเต็ม คือ

$$\ldots, 47, -29, 18, -11, 7, -4, 3, -1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$$

ทฤษฎีบท 2 ให้ f เป็นฟังก์ชันฟีโบนักชีและให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 แล้วจะมี จำนวนเต็มบวก k ซึ่ง $1 \le k \le m^2$ ที่ทำให้ $f(n+k) \equiv f(n) \pmod m$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n

บทพิสูจน์ พิจารณาคู่อันดับ $(f(j), f(j+1))$ มอดุโล m พบว่าโอกาสในการเกิดทั้งหมด m^2 ชุด ดังนี้

$$\begin{array}{cccccc}
(0,0), & (1,0), & (2,0), & (3,0), & \ldots & (m-1,0) \\
(0,1), & (1,1), & (2,1), & (3,1), & \ldots & (m-1,1) \\
(0,2), & (1,2), & (2,2), & (3,2), & \ldots & (m-1,2) \\
 & & & \vdots & & \\
(0,m-1), & (1,m-1), & (2,m-1), & (3,m-1), & \ldots & (m-1,m-1)
\end{array}$$

เมื่อพิจารณาจำนวนเต็ม $1 \le k \le m^2$ พบว่ามีค่าทั้งหมด m^2+1 ค่า

ดังนั้น จากหลักการช่องนกพิราบ จะต้องมีจำนวนเต็ม i และ j ซึ่ง $0 \le i < j \le m^2$ ที่ทำให้ $(f(i), f(i+1)) \equiv (f(j), f(j+1)) \pmod m$

นั่นคือ $f(i) \equiv f(j) \pmod m$ และ $f(i+1) \equiv f(j+1) \pmod m$

ให้ $k = j - i$ จะพิสูจน์ว่า $f(n+k) \equiv f(n) \pmod m$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n

สังเกตว่า $f(i) \equiv f(j) \pmod m$

$\equiv f(k+i) \pmod m$

และ $f(i+1) \equiv f(j+1) \pmod m$

$\equiv f(k+i+1) \pmod m$

ต่อไปจะพิสูจน์กรณีอื่นๆ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้ม แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $n \ge i$

สมมติว่า $f(n) \equiv f(n+k) \pmod m$ และ $f(n+1) \equiv f(n+1+k) \pmod m$

จะได้ว่า $f(n+2) \equiv f(n+1) + f(n) \pmod m$

$\equiv f(n+1+k) + f(n+k) \pmod m$

$\equiv f(n+2+k) \pmod m$

จากการพิสูจน์ในกรณีนี้ทำให้ได้ว่า $f(n+k) \equiv f(n) \pmod m$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > i+1$

กรณีที่ 2 ให้ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $n \le i$

สมมติว่า $f(n) \equiv f(n+k) \pmod m$ และ $f(n+1) \equiv f(n+1+k) \pmod m$

ได้ว่า $f(n-1) \equiv f(n+1) - f(n) \pmod m$

$\equiv f(n+1+k) - f(n+k) \pmod m$

$\equiv f(n-1+k) \pmod m$

จากการพิสูจน์ในกรณีนี้ทำให้สรุปได้ว่า $f(n+k) \equiv f(n) \pmod m$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n < i$

จะนิยามค่า k ที่สอดคล้องตามทฤษฎีบท 2 ว่า คาบของ f มอดุโล m ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 ให้ f เป็นฟังก์ชันฟีโบนักชีและ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 จะเรียกจำนวนเต็มบวก k ที่สอดคล้อง $f(n+k) \equiv f(n) \pmod m$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ว่า *คาบ* (Period) ของ f มอดุโล m และเรียกจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดสอดคล้อง $f(n+k) \equiv f(n) \pmod m$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ว่า *คาบปฐมฐาน* (Primitive Period) ของ f มอดุโล m และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ k(m)

ตัวอย่าง 2 ให้ f เป็นฟังก์ชันโบนักชีโดยที่ $f(0) = 4$ และ $f(1) = 2$

พิจารณา $m = 3$ จะได้

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(n) (mod 3)	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0

นั่นคือ $k(3) = 8$

พิจารณา $m = 5$ จะได้

n	1	2	3	4	5	6	7	8
f(n) (mod 5)	2	1	3	4	2	1	3	4

นั่นคือ $k(5) = 4$

บทแทรกต่อไปนี้แสดงถึงขอบเขตของคาบปฐมฐาน

บทแทรก 2 ให้ $k(m)$ เป็นคาบปฐมฐานของ f แล้ว $1 \le k(m) \le m^2$

บทพิสูจน์ ได้โดยตรงจากทฤษฎีบท 2

ทฤษฎีบทต่อไปแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของคาบและคาบปฐมฐาน

ทฤษฎีบท 3 ให้ k ป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า k เป็นคาบของ f มอดุโล m ก็ต่อเมื่อ $k(m) \mid k$

บทพิสูจน์ ให้ k เป็นคาบ ดังนั้น $k \ge k(m)$ จากขั้นตอนวิธีการหาร จะมี q และ r เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $k = qk(m) + r$ โดยที่ $0 \le r < k(m)$ เนื่องจาก $k(m)$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น q เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f(n) &\equiv f(n+k) \pmod{m} \\
&\equiv f(n+r+qk(m)) \pmod{m} \\
&\equiv f(n+r+(q-1)k(m)+k(m)) \pmod{m} \\
&\equiv f(n+r+(q-1)k(m)) \pmod{m} \text{ เนื่องจาก } k(m) \text{ เป็นคาบ} \\
&\vdots \\
&\equiv f(n+r+k(m)) \pmod{m} \\
&\equiv f(n+r) \pmod{m}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f(n) \equiv f(n+r) \pmod{m}$สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ถ้า $r > 0$ จะทำให้ r เป็นคาบของ f มอดุโล n ซึ่ง $r < k(m)$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง จะทำให้ได้ $r = 0$ เพราะฉะนั้น $k = qk(m)$ นั่นคือ $k(m) \mid m$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $k(m) \mid m$ได้ว่า $k = qk(m)$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก q

ให้ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f(n) &\equiv f(n+k(m)) \pmod{m} \\
&\equiv f(n+2k(m)) \pmod{m} \\
&\vdots \\
&\equiv f(n+qk(m)) \pmod{m} \\
&\equiv f(n+k) \pmod{m}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น k เป็นคาบของ f มอดุโล m ตามต้องการ

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของ $k(mn)$ กับ $k(m)$ และ $k(n)$ เมื่อ $(m,n) = 1$

ทฤษฎีบท 4 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ถ้า $(m,n) = 1$ แล้ว $k(mn) = [k(m), k(n)]$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $k(mn)$ เป็นคาบของ f มอดุโล mn จึงได้ว่า $f(N+k(mn)) \equiv f(N) \pmod{mn}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม N จึงได้ว่า

$$f(N+k(mn)) \equiv f(N) \pmod{m} \qquad (1)$$

$$f(N+k(mn)) \equiv f(N) \pmod{n} \qquad (2)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม N

โดย (1) และ (2) จะได้ว่า $k(mn)$ เป็นคาบของ f มอดุโล m และเป็นคาบของ f มอดุโล n ตามลำดับ และจากทฤษฎีบท 3 ทราบว่า $k(m) \mid k(mn)$ และ $k(n) \mid k(mn)$ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $[k(m),k(n)] \mid k(mn)$

ในทางกลับกัน เนื่องจาก $k(m) \mid [k(m),k(n)]$ และ$k(n) \mid [k(m),k(n)]$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 3 ได้ว่า $[k(m),k(n)]$

เป็นคาบของ f มอดุโล m และคาบของ f มอดุโล n นั่นคือ

$$f(N+[k(m),k(n)]) \equiv f(N) \pmod{m} \text{ และ } f(N+[k(m),k(n)]) \; f(N) \pmod{n}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม N

เนื่องจาก $(m, n) = 1$ ทำให้ได้ว่า $f(N+[k(m),k(n)]) \; f(N) \pmod{mn}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม N ได้ว่า $[k(m), k(n)]$ เป็นคาบของ f มอดุโล mn ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3 ทำให้ได้ว่า $k(mn) \mid [k(m), k(n)]$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า ถ้า $(m, n) = 1$ แล้ว $k(mn) = [k(m), k(n)]$

ตัวอย่าง 3 ให้ f เป็นฟังก์ชันโบนักชีโดยที่ $f(0) = 4$ และ $f(1)=2$ จะหา $k(15)$ โดยใช้ทฤษฎีบท 4 ให้ $m = 3$ และ $n = 5$ นั่นคือ $mn = 15$ เนื่องจาก $(3,5) = 1$ จากทฤษฎีบท 4 ทำให้ได้ว่า $k(15) = [k(3), k(5)]$ และจากตัวอย่าง 2 ได้ว่า $k(15) = [k(3), k(5)] = [8, 4] =8$

อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

ฟังก์ชันฟีโบนักชีเป็นนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส ในการวิจัยนี้ ได้ศึกษาคาบของฟังก์ชันฟีโบนักชีมอดุโล m ซึ่งเป็นการขยายการศึกษาคาบของลำดับของจำนวนฟีโบนักชีมอดุโล m และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาคาบของลำดับลูคัสมอดุโล m และสำดับอื่นที่เกิดจากกรณีเฉพาะของฟังก์ชันฟีโบนักชี

นอกจากนี้ ผู้สนใจยังสามารถต่อยอดจากบทความนี้ได้โดยใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันฟีโบนักชีขยายการศึกษาสมบัติของจำนวนฟีโบนักชีอื่นๆ ได้ด้วย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณเป็นอย่างสูงสำหรับผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านของบทความนี้ที่ได้ข้อเสนอแนะและข้อคิดเห็นบทความนี้

ผู้วิจัยขอขอบคุณโครงการ พสวท. ที่ได้สนับสนุนให้ผู้วิจัยได้ทำงานวิจัยในภาคฤดูร้อนและขอขอบคุณหน่วยวิจัยพีชคณิตและการประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ที่ได้สนับสนุนในการทำวิจัย

เอกสารอ้างอิง

[1] Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Number with Applications.* New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

[2] Jisawat, K., & Jitpitak, S. (2552). Some Divisibility Properties of Fibonacci Numbers. *Thaksin University Journal*, *12*(2), 50-58.

[3] Wiboonton, K. (2560). The Fibonacci Sequence in Mathematics Courses. *Math Journal*, *62*(691), 1-11.

[4] Carlitz, L., & Ferns, H. H. (1970). Some Fibonacci and Lucas Identities. *Fibonacci Quarterly*, *8*, 61-73.

[5] Luca, F. (2003). Fibonacci and Lucas Numbers with only One Distinct Digit. *Portugaliae Mathematica*, *57*(2), 243-254.

[6] Elmore, M. (1967). Fibonacci Functions. *Fibonacci Quarterly*, *5*, 371-382.

[7] Bunder, M. W. (1978). More Fibonacci Functions. *Fibonacci Quarterly, 16*, 97-98.

[8] Spickerman, W. R. (1970). A Note on Fibonacci Functions. *Fibonacci Quarterly, 8*, 397-401.

[9] Jameson, G. J. O. (2018). Fibonacci Periods and Multiples. *Mathematical Gazette*, *102*(553), 63-76.