

การกำกับแบบเกรซฟูลในบริบทการทำซ้ำองค์ประกอบของกราฟ

Graceful Labeling in the Context of Duplication of Graph Elements

ศิวพร แซ่วัน^{1*}, ธนาภา ขาวมัน², วรารักษ์ แดงนภาพรกุล² และสุมิตา แก้วทอง²

Siwaporn Saewan^{1*}, Thanapa Khawman², Waraporn Dangnapaponkul² and Sumita Kaewthong²

บทคัดย่อ

กำหนดให้กราฟเชิงเดียว $G = ((V(G), E(G)))$ เป็นกราฟเชื่อมโยงและไม่ระบุทิศทาง ซึ่งมีจำนวนจุดยอด p จุด และมีจำนวนเส้นเชื่อม q เส้น กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่ส่งเซตของจุดยอดของกราฟ G ไปยังเซตของจำนวนเต็ม $\{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$ และ f^* เป็นฟังก์ชันที่ส่งเซตของเส้นเชื่อมของกราฟ G ไปยังเซตของจำนวนเต็มบวก $\{1, 2, 3, \dots, q\}$ กำหนดโดย

$$f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$$

สำหรับทุกจุดยอด $u, v \in V(G)$ และเส้นเชื่อม $uv \in E(G)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและ f^* เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง แล้วจะเรียก f ว่า การกำกับแบบเกรซฟูล (Graceful Labeling) ของกราฟ G และเรียกกราฟ G พร้อมด้วยการกำกับ f ว่า กราฟเกรซฟูล (Graceful Graph) ในงานวิจัยนี้ จะหาการกำกับแบบเกรซฟูลในรูปแบบทั่วไปสำหรับกราฟใหม่บางกราฟซึ่งได้จากการทำซ้ำองค์ประกอบของกราฟ และพิสูจน์ว่ากราฟใหม่เป็นกราฟเกรซฟูล

คำสำคัญ: การกำกับแบบเกรซฟูล การทำซ้ำของจุดยอด การทำซ้ำของเส้นเชื่อม กราฟวิถี

Abstract

Let a simple graph $G = ((V(G), E(G)))$ be connected and undirected graph with p vertices and q edges. Let f be a function from the set of vertices to the set of integer $\{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$ and let f^* be a function from the set of edge to the set of positive integer $\{1, 2, 3, \dots, q\}$ defined as

$$f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$$

for all $u, v \in V(G)$ and $uv \in E(G)$. A function f is called graceful labeling of a graph G if f is injective and f^* is bijective. The graph G which admits graceful labeling f is called a graceful graph. In this paper, we find graceful labeling for some new graphs results from the duplication of graph elements and then we prove that the new graphs are graceful.

Keywords: Graceful Labeling, Duplication of a Vertex, Duplication of an Edge, Path

¹ ผศ.ดร., สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ พัทลุง 93210

² นิสิตระดับปริญญาตรี หลักสูตร วท.บ. (คณิตศาสตร์), สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ พัทลุง 93210

¹ Asst. Prof. Dr., Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Thaksin University, Phatthalung, 93210, Thailand

² Undergraduate Students, B.Sc.in Mathematics, Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Thaksin University, Phatthalung, 93210, Thailand

*Corresponding author: Tel.: 089-7230444. E-mail address: si_wa_pon@hotmail.com

(Received: November 30, 2018; Revised: January 17, 2019; Accepted: February 15, 2019)

บทนำ

กราฟ $G = (V(G), E(G))$ ประกอบด้วยเซตจำกัด $V(G)$ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และเซต $E(G)$ ซึ่งเป็นเซตของคู่อันดับของสมาชิกที่แตกต่างกันใน $V(G)$ สมาชิกใน $V(G)$ เรียกว่า จุดยอด หรือ จุด (Vertex) สมาชิกใน $E(G)$ เรียกว่า เส้นเชื่อม หรือ เส้น (Edge) ในที่นี้เพื่อความสะดวกจะเขียนแทนกราฟ $G = (V(G), E(G))$ ด้วยกราฟ G ถ้ากราฟ G มีจำนวนจุดยอด p จุด แล้วจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|V(G)| = p$ ถ้ากราฟ G มีจำนวนเส้นเชื่อม q เส้น แล้วจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|E(G)| = q$ ถ้าจุด u และ v เป็นจุดยอดในกราฟ G และ $e = uv$ เป็นเส้นเชื่อมในกราฟ G แล้วจะกล่าวว่า 1) จุดยอด u ประชิด (Adjacent) กับจุดยอด v 2) เส้นเชื่อม e กระทบ (Incident) กับจุดยอด u หรือกล่าวว่า จุด u กระทบกับเส้นเชื่อม e 3) เส้นเชื่อม e เชื่อม (Join) จุดยอด u และจุดยอด v 4) ย่านใกล้เคียง (Neighborhood) ของจุดยอด v ในกราฟ G คือเซตของจุดยอดทั้งหมดที่ประชิดกับจุดยอด v ในกราฟ G เขียนแทนด้วย $N(v)$ นั่นคือ $N(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$ สำหรับจุดยอด v ในกราฟ G ดีกรี (Degree) ของจุดยอด v คือจำนวนเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอด v สำหรับจุดยอดที่มีดีกรี 1 จะเรียกว่า จุดยอดเพนเดนท (A Pendent Vertex) เส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอดเพนเดนท เรียกว่า เส้นเชื่อมเพนเดนท (A Pendent Edge) สำหรับจุดยอด u และ v ในกราฟ G วิถี $u-v$ ในกราฟ G (A Path in the Graph G) คือลำดับของจุดยอดและเส้นในกราฟ G ที่สลับกันโดยเริ่มต้นจากจุดยอด u และสิ้นสุดที่จุดยอด v ซึ่งทุกๆ จุดยอดในวิถีต้องแตกต่างกัน ถ้าวิถี $u-v$ ในกราฟ G แล้วจะกล่าวว่า จุดยอด u เชื่อมโยง (Connect) กับจุดยอด v หรือกล่าวว่า จุดยอด u และ จุดยอด v เชื่อมโยงกัน ถ้าทุกๆ สองจุดยอดใดๆ ในกราฟ G เชื่อมโยงกัน แล้วจะเรียกกราฟ G ว่า กราฟเชื่อมโยง (A Connected Graph) กราฟวิถี (A Path Graph) หมายถึงกราฟเชื่อมโยงที่มีจุดยอดจำนวน n จุด และเส้นเชื่อมจำนวน $n-1$ เส้น แต่ละจุดมีดีกรีอย่างมากที่สุดคือ 2 เขียนแทนด้วย P_n

สำหรับกราฟเชื่อมโยง G ที่มีเส้นเชื่อมจำนวน q เส้น การกำกับ (Labeling) บนกราฟ G คือการกำหนดชื่อให้กับจุดยอด หรือเส้นเชื่อม หรือทั้งจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟ G ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด การกำกับแบบเกรซฟูล (Graceful Labeling) ของกราฟ G คือการกำหนดชื่อให้กับจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟ G ด้วยจำนวนเต็มดังนี้

กำหนดฟังก์ชัน f และ f^* ดังนี้

$$f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, q\} \text{ และ } f^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, q\}$$

โดยที่ $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ สำหรับทุกจุดยอด $u, v \in V(G)$ และเส้นเชื่อม $uv \in E(G)$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ f^* เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง แล้วจะเรียก f ว่า การกำกับแบบเกรซฟูล (Graceful Labeling) ของกราฟ G และเรียกกราฟ G พร้อมด้วยการกำกับชื่อจุดยอดแบบเกรซฟูล f ว่า กราฟเกรซฟูล (Graceful Graph) เรียกเซต $\{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$ หรือ $\{1, 2, 3, \dots, q\}$ ว่า เซตกำกับ (Label Set)

การกำกับแบบเกรซฟูลเริ่มต้นศึกษาโดย Rosa [1] ซึ่งโรซาเรียกการกำกับจุดยอดดังกล่าวว่าการกำกับ- β (β -labeling) ต่อมา Golomb [2] ได้เรียกการกำกับจุดยอดดังกล่าวว่าการกำกับแบบเกรซฟูล (Graceful Labeling) มีนักวิจัยทางด้านทฤษฎีกราฟหลายคนได้ศึกษาเกี่ยวกับการกำกับแบบเกรซฟูล อาทิเช่น ในปี 2007 Cattell [3] ได้ศึกษาการกำกับแบบเกรซฟูลบนกราฟซึ่งสร้างขึ้นใหม่และหาการกำกับแบบเกรซฟูลในรูปแบบทั่วไปสำหรับกราฟวิถี P_n ในปี 2014 Kaneria et al. [4] ศึกษาการกำกับแบบเกรซฟูลบนกราฟใหม่ที่ได้จากการดำเนินการบนกราฟวง และการดำเนินการบนกราฟสองส่วนบริบูรณ์ (Complete Bipartite Graph) ปี ค.ศ. 2015

Boxwala and Vashishta [5] ศึกษาการกำกับแบบเกรซฟูลบน กราฟใหม่ โดยกราฟใหม่สร้างจากการดำเนินการบนกราฟวง Koh *et al.* [6] ศึกษาการกำกับแบบเกรซฟูลบนกราฟใหม่ที่ได้จากการเชื่อม (Join) กราฟบริบูรณ์ (Complete Graph) กราฟว่าง (Empty Graph) และกราฟวง (Cycle หรือ Cycle Graph) ในปี 2016 Hegde and Kumudakshi [7] ศึกษาการกำกับแบบเกรซฟูลบนกราฟระนาบทิศทาง ในปี 2017 Khatun and Nayeem [8] ได้ศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ ที่จะทำให้กราฟตัวหารของศูนย์เป็นกราฟเกรซฟูล ในปี 2018 Ragukumar and Sethuraman [9] ได้แสดงให้เห็นว่ากราฟต้นไม้ทวิภาคเป็นกราฟเกรซฟูล ในปีเดียวกัน Wang and Zhang [10] ศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้กราฟปกติมีการกำกับแบบเกรซฟูล สำหรับจุดมุ่งหมายในงานวิจัยนี้คือ สร้างกราฟใหม่โดย

1. การทำซ้ำเส้นเชื่อมด้วยจุดยอด (Duplication of an Edge by a Vertex) บนกราฟวิถี P_n

2. การทำซ้ำจุดยอดด้วยจุดยอด (Duplication of a Vertex by a Vertex) บนกราฟวิถี P_n

และหาการกำกับแบบเกรซฟูลในรูปแบบทั่วไปของกราฟใหม่ พร้อมทั้งพิสูจน์การกำกับแบบเกรซฟูลที่ได้เป็นไปตามที่กำหนด

วิธีดำเนินการ

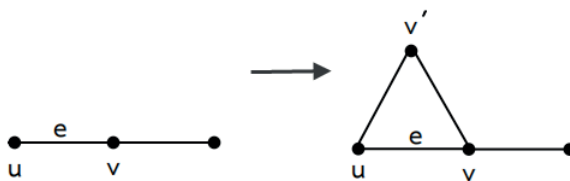
1. ศึกษาการกำกับแบบเกรซฟูล และกราฟเกรซฟูลจากหนังสือ เอกสาร และงานวิจัย ที่เกี่ยวข้อง
2. ศึกษาวิธีการสร้างกราฟใหม่ จากหนังสือ เอกสาร และ งานวิจัย ที่เกี่ยวข้อง
3. สร้างกราฟใหม่โดยการดำเนินการบนกราฟวิถี P_n และหาการกำกับแบบเกรซฟูลในรูปแบบทั่วไปของกราฟใหม่
4. พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ได้

ผลการวิจัย

บทนิยามที่ 1

กำหนดให้จุดยอด u และ v เป็นจุดยอดในกราฟ G กราฟ G' เป็นกราฟใหม่ที่สร้างจากการทำซ้ำเส้นเชื่อม $e = uv$ บนกราฟ G ด้วยจุดยอดใหม่ v' (Duplication of an Edge $e = uv$ by a Vertex v') โดยที่ $N(v') = \{u, v\}$

ตัวอย่าง แสดงการสร้างกราฟใหม่จากการทำซ้ำเส้นเชื่อม $e = uv$ ด้วยจุดยอด v' บนกราฟ G



ภาพที่ 1 กราฟใหม่จากการทำซ้ำเส้นเชื่อมด้วยจุดยอดใหม่

ทฤษฎีบทที่ 1

กำหนดให้ P_n คือกราฟวิถีที่มีจำนวนจุดยอด n จุด เมื่อ $n \geq 2$

ถ้า P_n' คือกราฟที่สร้างโดยการทำซ้ำเส้นเชื่อมเป็นเส้นด้วยจุดยอดใหม่ v' บนกราฟวิถี P_n สำหรับ $n \geq 2$

แล้วจะได้ว่า P_n' เป็นกราฟเกรซฟูล

การพิสูจน์

การแสดงว่า P_n' เป็นกราฟเกรซฟูล จะต้องแสดงว่า มีการกำกับแบบเกรซฟูลสำหรับ P_n'

ให้ $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ เป็นจุดยอดของกราฟวิถี P_n

ให้ P_n' คือกราฟที่ได้จากการทำซ้ำเส้นพื้นเดนที่บนกราฟวิถี P_n ด้วย จุดยอดใหม่ v'

โดยไม่เสียเลยทั่วไป ให้เส้นเชื่อมพื้นเดนที่ คือเส้นเชื่อม v_1v_2 และทำซ้ำเส้นเชื่อม v_1v_2 ด้วยจุดยอด v'

พิจารณากราฟ P_n' จะได้ว่า

$$q = |E(P_n')| = (n-1) + 2 = n+1 \text{ และ } p = |V(P_n')| = n+1 = q$$

กำหนดการกำกับ $f: V(P_n') \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, q = n+1\}$

ดังนี้

$$f(v') = 0$$

$$\text{สำหรับ } 1 \leq i \leq n \quad f(v_i) = \begin{cases} n+1 - \frac{i-1}{2}, & i = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{i}{2}, & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ i และ j เป็นจำนวนคู่เหมือนกัน

$$\text{ให้ } f(v_i) = f(v_j)$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{i}{2} = \frac{j}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } i = j$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

กรณีที่ 2 เมื่อ i และ j เป็นจำนวนคี่เหมือนกัน

$$\text{ให้ } f(v_i) = f(v_j)$$

$$\text{จะได้ว่า } (n+1) - \left(\frac{i-1}{2}\right) = (n+1) - \left(\frac{j-1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{i-1}{2}\right) = \left(\frac{j-1}{2}\right)$$

$$\text{ดังนั้น } i = j$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

กรณีที่ 3 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่และ j เป็นจำนวนคู่ (หรือ i เป็นจำนวนคู่และ j เป็นจำนวนคี่)

สมมติให้ $i \neq j$ และ $f(v_i) = f(v_j)$

$$\text{จะได้} \quad (n+1) - \left(\frac{i-1}{2}\right) = \frac{j}{2}$$

$$i + j - 3 = 2n$$

แต่เนื่องจาก $i \leq n$ และ $j \leq n$

จะได้ $i + j - 3 \leq n + n - 3 = 2n - 3 < 2n$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f(v_i) \neq f(v_j)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่านั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ต่อไปพิจารณา f^*

เนื่องจากเส้นเชื่อมในกราฟ P'_n ประกอบด้วยเส้น v'_1, v'_2 และเส้น $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n$

ซึ่งกราฟ P'_n มีจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมด $n+1$ เส้น

จากการกำหนด f จะได้ f^* ดังนี้

กรณีที่ 1

$$f^*(v'_1) = |f(v') - f(v_1)| = |0 - f(v_1)| = n+1$$

กรณีที่ 2

$$f^*(v'_2) = |f(v') - f(v_2)| = |0 - f(v_2)| = 1$$

กรณีที่ 3 สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ จะได้ว่า

$$f^*(v_i v_{i+1}) = |f(v_i) - f(v_{i+1})| = n+1-i$$

เมื่อแทน $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ จะได้ $n, n-1, n-2, \dots, 4, 3, 2$ ตามลำดับ

ดังนั้นจากทั้ง 3 กรณีจะได้ว่า $\{f^*(E(P'_n))\} = \{1, 2, 3, \dots, n+1\}$

จะแสดงว่า f^* เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

พิจารณาเฉพาะกรณีที่ $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$

สมมติให้ $f^*(v_i v_{i+1}) = f^*(v_j v_{j+1})$

จะได้ว่า $n+1-i = n+1-j$

ดังนั้น $i = j$

นั่นคือ f^* เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

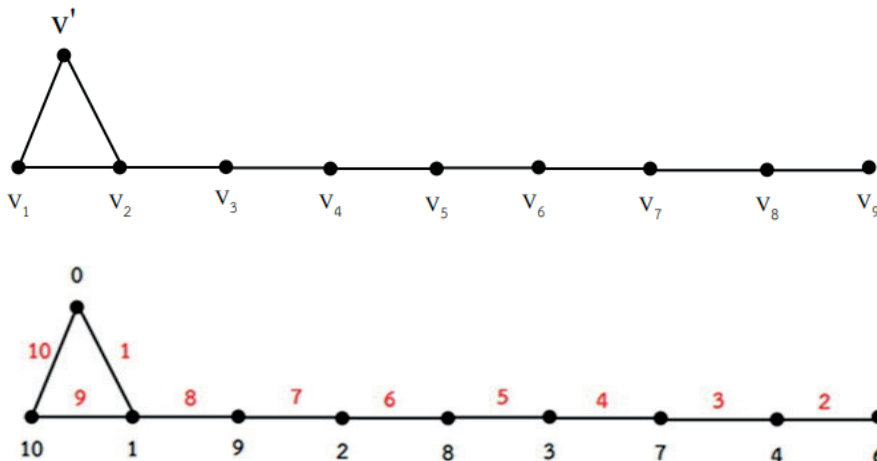
เนื่องจากกราฟ P'_n มีจำนวนเส้นเชื่อมคือ $|E(P'_n)| = n+1$ เส้น และ $\{f^*(E(P'_n))\} = \{1, 2, 3, \dots, n+1\}$

และเนื่องจาก f^* เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น f^* เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ทำให้ได้ว่า f เป็นการกำกับแบบกราฟฟูโลสำหรับ P_n'

นั่นคือ P_n' พร้อมด้วยการกำกับ f เป็นกราฟกราฟฟูโล

ตัวอย่าง แสดงกราฟกราฟฟูโลโดยใช้การกำกับแบบกราฟฟูโลตามทฤษฎีบทที่ 1

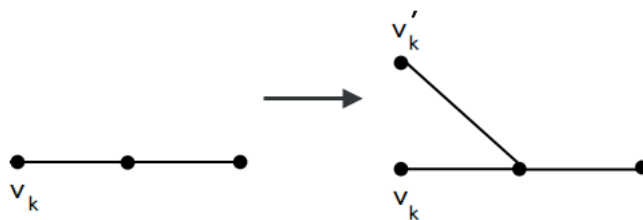


ภาพที่ 2 กราฟกราฟฟูโลซึ่งเป็นกราฟที่ได้จากการทำซ้ำเส้นเชื่อมด้วยจุดยอดใหม่

บทนิยามที่ 2

กำหนดให้จุด v_k เป็นจุดยอดในกราฟ G กราฟ G' เป็นกราฟใหม่ที่สร้างจากการทำซ้ำของจุดยอด v_k บนกราฟ G ด้วยจุดยอดใหม่ v_k' (Duplication of a Vertex v_k by a Vertex v_k') โดยที่ $N(v_k) = N(v_k')$

ตัวอย่าง แสดงการสร้างกราฟใหม่จากการทำซ้ำจุดยอด v_k ด้วยจุดยอดใหม่ v_k' บนกราฟ G



ภาพที่ 3 กราฟใหม่จากการทำซ้ำจุดยอดด้วยจุดยอดใหม่

ทฤษฎีบทที่ 2

กำหนดให้ P_n คือกราฟวิถีที่มีจำนวนจุดยอด n จุด เมื่อ $n \geq 2$

ถ้ากราฟ $\overline{P_n}$ ได้จากการทำซ้ำด้วยจุดยอดเพิ่มเติมบนกราฟวิถี P_n ด้วยจุดยอดใหม่ v' แล้ว $\overline{P_n}$ เป็นกราฟกราฟฟูโล

การพิสูจน์

การแสดงว่า $\overline{P_n}$ เป็นกราฟเกรซฟูล จะต้องแสดงว่า มีการกำกับแบบเกรซฟูลสำหรับ $\overline{P_n}$ ดังต่อไปนี้
ให้จุด $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ เป็นของจุดยอดของกราฟวิถี P_n โดยไม่เสียไร้วัยไปให้ v_1 เป็นจุดยอดพื้นแดนที่
ให้ $\overline{P_n}$ คือกราฟที่ได้จากการทำซ้ำจุดยอด v_1 ด้วยจุดยอดใหม่ v'

พิจารณากราฟ $\overline{P_n}$

จะได้ว่า $q = |E(\overline{P_n})| = (n-1) + 1 = n$ และ $p = |V(\overline{P_n})| = n + 1$

กำหนดการกำกับ $f: V(\overline{P_n}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n = q\}$

ดังนี้

$$f(v') = n$$

สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$f(v_i) = \begin{cases} = (n-1) - \left(\frac{i-1}{2}\right), & i = 1, 3, 5, \dots \\ = i - \left(\frac{i}{2} + 1\right), & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
กรณีที่ 1 เมื่อ i และ j เป็นจำนวนคู่เหมือนกัน
ให้

$$f(v_i) = f(v_j)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } i - \left(\frac{i}{2} + 1\right) &= j - \left(\frac{j}{2} + 1\right) \\ \frac{i}{2} &= \frac{j}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } i = j$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

กรณีที่ 2 เมื่อ i และ j เป็นจำนวนคี่เหมือนกัน
ให้

$$f(v_i) = f(v_j)$$

$$\text{จะได้ว่า } (n-1) - \left(\frac{i-1}{2}\right) = (n-1) - \left(\frac{j-1}{2}\right)$$

$$\text{ดังนั้น } i = j$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

กรณีที่ 3 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่และ j เป็นจำนวนคี่ (หรือ i เป็นจำนวนคี่และ j เป็นจำนวนคู่)

$$\text{สมมติให้ } i \neq j \text{ และ } f(v_i) = f(v_j)$$

$$\text{จะได้ } i - \left(\frac{i}{2} + 1\right) = (n-1) - \left(\frac{j-1}{2}\right)$$

$$i + j - 1 = 2n$$

แต่เนื่องจาก $i \leq n$ และ $j \leq n$

จะได้ $i + j - 1 \leq n + n - 1 = 2n - 1 < 2n$

เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $f(v_i) \neq f(v_j)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ต่อไปพิจารณา f^*

เนื่องจากเส้นเชื่อมในกราฟ $\overline{P_n}$ คือ $v'v_2, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ มีจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมด n เส้น

จากการกำหนด f จะได้ f^* คือ

$$f^*(v'v_2) = n$$

$$f^*(v_iv_{i+1}) = n - i \text{ เมื่อ } i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

เมื่อแทน $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ จะได้ $n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$ ตามลำดับ

ดังนั้น $\{f^*(E(\overline{P_n}))\} = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ หรือ $R_{f^*} = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$

นั่นคือ f^* เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ต่อไปจะแสดงว่า f^* เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

พิจารณาเฉพาะกรณีที่ $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$

$$\text{สมมติให้ } f^*(v_iv_{i+1}) = f^*(v_jv_{j+1})$$

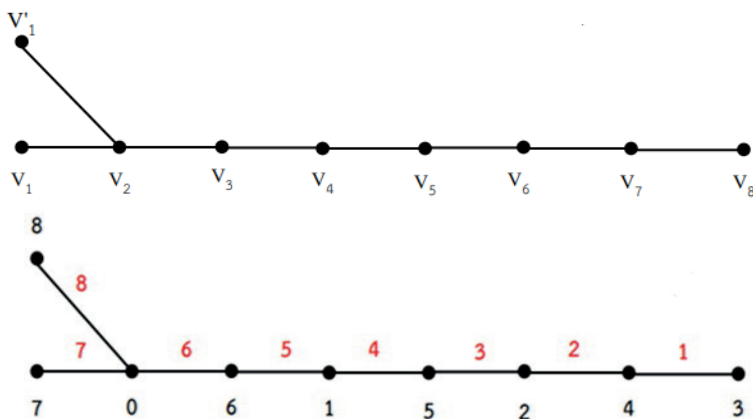
$$\text{จะได้ว่า } n - i = n - j$$

$$\text{ดังนั้น } i = j$$

นั่นคือ f^* เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ทำให้ได้ว่า f เป็นการกำกับแบบเกรซฟูลสำหรับ $\overline{P_n}$ ดังนั้น $\overline{P_n}$ พร้อมด้วยการกำกับ f เป็นกราฟเกรซฟูล

ตัวอย่าง แสดงกราฟเกรซฟูลโดยใช้การกำกับแบบเกรซฟูลตามทฤษฎีบทที่ 2



ภาพที่ 4 กราฟเกรซฟูลซึ่งเป็นกราฟที่ได้จากการทำซ้ำจุดยอดด้วยจุดยอดใหม่

อภิปรายผลและสรุป

ในงานวิจัยนี้ได้สร้างทฤษฎีบทใหม่จำนวน 2 ทฤษฎีบท แต่ละทฤษฎีบทประกอบด้วย กราฟใหม่ ซึ่งสร้างจากกราฟวิถี โดยการนำเส้นเชื่อมเพิ่มเติมที่ด้วยจุดยอดใหม่บนกราฟวิถี P_n และนำจุดยอดเพิ่มเติมที่ด้วยจุดยอดใหม่บนกราฟวิถี P_n เมื่อได้กราฟใหม่แล้วถัดไปคือหาการกำกับแบบเกรซฟูลสำหรับกราฟใหม่ในรูปแบบทั่วไป พร้อมกับพิสูจน์การกำกับที่ได้เป็นไปตามเงื่อนไขของการกำกับแบบเกรซฟูลสำหรับในงานวิจัยนี้ การพิสูจน์ f^* เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แต่ละทฤษฎีบทได้แสดงการพิสูจน์ที่แตกต่างกัน

กิตติกรรมประกาศ

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยโครงการวิจัยเงินรายได้มหาวิทยาลัยทักษิณ กองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยทักษิณ ประเภททุนวิจัยพื้นฐาน ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2561

เอกสารอ้างอิง

- [1] Rosa, A. (1967). *On certain valuations of the vertices of a graph*. (In Theory of Graphs, International Symposium, Rome, July, 1966), New York: Gordon and Breach.
- [2] Golomb, S. W. (1972). How to number a graph. In R. C. Read (Ed.). *Graph Theory and Computing*. 23–37. New York, U.S.A. Academic Press.
- [3] Cattell, R. (2007). Graceful labellings of paths. *Discrete Mathematics*, 307(24), 3161–3176.
- [4] Kaneria, V. J., Makadia, H. M., & Jariya, M. M. (2014). Graceful labeling for cycle of graph. *International Journal of Mathematics Research*, 6(2), 173–178.
- [5] Boxwala, S. A., & Vashishta, P. (2015). Some new families of graceful graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 48, 127–133.
- [6] Koh, K. M., Phoon, L. Y., & Soh, K. W. (2015). The gracefulness of the join of graphs (II). *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 12(2-3) 180–185.
- [7] Hegde, S. M., & Kumudakshi. (2016). Forther results on graceful directed graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 53, 149–154.
- [8] Khatun, S., & Nayeem, A. (2017). Graceful labeling of some zero divisor graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 63, 189–196.
- [9] Ragukumar, P., & Sethuraman, G. (2018). Binomial trees are graceful, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, In Press.
- [10] Wang, T. M., & Zhang, G. H. (2018). On edge–graceful labeling and deficiency for regular graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 15 (1), 105–111.