

ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนเต็มใดๆ กับจำนวนหลายหลัก
ที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน

Generalized Beauty : The Product of Any integer and The Many Digit Number in Which
Every Digit is The Same

นิคม หวลอารมณ์¹ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์^{2*}

Nikhom Huan-arom¹ and Aiyared Iampan^{2*}

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวนเต็ม n ใดๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็ม q เดียวกัน เพื่อเพิ่มความสะดวกในการคำนวณและแสดงให้เห็นถึงความสวยงามของผลคูณนี้ ผลการศึกษาพบว่ารูปแบบทั่วไปของผลคูณนี้จะเป็นจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็ม $q \times n$ เดียวกัน

คำสำคัญ : จำนวนเศษเหลือ หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน

Abstract

This paper applies the remainder number and the Principle of Mathematical Induction to find a general form of the product of any integer n and the many digit number in which every digit is the same q . It is a convenient method to show the beauty of this product. The results show that the general form of the product is the many digit number in which every digit is the same $q \times n$.

Keywords : Remainder Number, Principle of Mathematical Induction, Many Digit Number in Which Every Digit is The Same

¹ นิสิตปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา จังหวัดพะเยา

² ผศ. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา จังหวัดพะเยา

* Corresponding author : E-mail : aiyared.ia@up.ac.th โทรศัพท์/โทรสาร: 0-5446-6666

บทนำและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

การศึกษารูปแบบทั่วไปที่สวยงามทางพีชคณิตของจำนวนหลายหลักนั้นนับว่ามีประโยชน์อย่างมากในชีวิตประจำวันของเรา สำหรับช่วยเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นในการคำนวณหาผลลัพธ์ในกรณีฉุกเฉิน เมื่อเราไม่มีเครื่องมือช่วยคำนวณ อาทิ เครื่องคิดเลข เครื่องคอมพิวเตอร์ หรือแม้กระทั่งโทรศัพท์มือถือ บางครั้งแม้ว่าจะมีเครื่องช่วยคำนวณเหล่านี้ก็อาจจะคำนวณหาค่าไม่ได้หากเป็นการคำนวณของจำนวนที่มีจำนวนหลักมาก ๆ ฉะนั้นสูตรลัดบางอย่างสำหรับการคำนวณจึงเป็นทางออกที่เหมาะสมที่สุด สำหรับการศึกษาหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนบางอย่างทางพีชคณิตของจำนวนที่ทุกหลักเป็นจำนวนเดียวกันได้มีการศึกษาในหลายรูปแบบ ดังนี้ อัยเรศ [1] และ ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ [2] ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) จากขั้นตอนวิธีการหารสำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ โดย $a = q \cdot r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r < 10$ อัยเรศ [1] ได้ศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้และมีลักษณะที่สวยงาม ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = q \cdot r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $0 \leq r < 10$ จะได้ว่า $\left(\frac{111\dots1}{r(0)=n}\right)^2 = 123\dots9, 0, 1\dots q, (r-1)_q, r_q, (r-1)_{q-1}, 1, 09\dots321$ ณัฐพงษ์ และ อัยเรศ [3] ได้ศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 3 (เลขโดด 6) ยกเว้นหลักหน่วยเป็นเลขโดด 4 (เลขโดด 7) โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $\left(\frac{333\dots34}{r(3)=n}\right)^2 = \frac{111\dots1555\dots56}{r(1)=n+1} \cdot \frac{r(5)=n}{r(3)=n}$ และ $\left(\frac{666\dots67}{r(6)=n}\right)^2 = \frac{444\dots4888\dots89}{r(4)=n+1} \cdot \frac{r(8)=n}{r(6)=n}$ แสงประทีปและ อัยเรศ [4] ได้ศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 6 (เลขโดด 3, 9) กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 6 (เลขโดด 3, 9) โดยได้พบว่าผลบวกของผลการยกกำลังสอง

นี้สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $\left(\frac{666\dots6}{r(6)=n}\right)^2 + \frac{666\dots6}{r(6)=n} = \frac{444\dots4222\dots2}{r(4)=n} \cdot \frac{r(2)=n}{r(6)=n} + \frac{333\dots3}{r(3)=n} = \frac{111\dots1222\dots2}{r(1)=n} \cdot \frac{r(2)=n}{r(6)=n}$ และ $\left(\frac{999\dots9}{r(9)=n}\right)^2 + \frac{999\dots9}{r(9)=n} = \frac{999\dots9000\dots0}{r(9)=n} \cdot \frac{r(0)=n}{r(9)=n}$ มากกว่านั้น อภิลิทธิ และ อัยเรศ [5] ได้นิยามและศึกษาลักษณะของจำนวนหลายหลัก ซึ่งแต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม เช่น 88888 (จำนวนห้าหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 8) และ (27)(27)(27)(27)(27) (จำนวนเจ็ดหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 27) พร้อมทั้งหาตัวผกผันภายใต้การดำเนินการทวิภาคที่ ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ [2] ได้นิยามขึ้นมา

บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนเต็มใดๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือและการพิสูจน์ คือขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) [6] ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง $a = b \cdot q + r$ และ $0 \leq r < |b|$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) [6] กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

- (1) $P(n_0)$ เป็นจริง
- (2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq n_0$ ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลืออย่างละเอียด ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาและขยายการศึกษาของบทความนี้ โดยดูการศึกษาของจำนวนเศษเหลือได้จาก [1, 3, 4, 7]

จากขั้นตอนวิธีการหาร อัยเรศ [1] และ ณัฐวุฒิ

และ อัยเรศ [2] ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $b=10$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q (ผลหาร) และ r (เศษเหลือ) ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r < 10$ ฉะนั้น r เป็นจำนวนหนึ่งหลักหรือเลขโดดนั่นเอง สัญลักษณ์จำนวนเศษเหลือสำหรับ a โดย

$$a = {}_q r \quad (I)$$

เช่น

$$\begin{array}{lllll} -450 = {}_{-45}0 & -30 = {}_{-3}0 & 0 = {}_00 & 30 = {}_30 & 450 = {}_{45}0 \\ -451 = {}_{-46}9 & -31 = {}_{-4}9 & 1 = {}_01 & 31 = {}_31 & 451 = {}_{45}1 \\ -452 = {}_{-46}8 & -32 = {}_{-4}8 & 2 = {}_02 & 32 = {}_32 & 452 = {}_{45}2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -459 = {}_{-46}1 & -39 = {}_{-4}1 & 9 = {}_09 & 39 = {}_39 & 459 = {}_{45}9 \end{array}$$

ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ [2] ได้นิยามเซตของจำนวนใน (I) ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 [2] กำหนดให้ ${}_Z \mathcal{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (I) ทั้งหมด นั่นคือ ${}_Z \mathcal{R} = \{{}_q r \mid q, r \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0 \leq r < 10\}$ และเรียกสมาชิกของ ${}_Z \mathcal{R}$ ว่า จำนวนเศษเหลือ (remainder number)

เพื่อความสะดวก เราเขียนจำนวนเศษเหลือ ${}_0 r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0 \leq r < 10$ และเพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (I) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ ซึ่งทำได้โดยการบวกทดจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย และสำหรับจำนวนในหลักหน่วยให้ดึงเศษลงมาได้เลยเพื่อให้เข้าใจได้ง่ายจะขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $8_{23} 47_1 9_{18} 9_2 745$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้ $8_{23} 47_1 9_{18} 9_2 745 = (8+23)4(7+1)(9+18)(9+2)745 = {}_3 148_2 7_1 1745 = 314(8+2)(7+1)1745 = 314_1 081745 = 31(4+1)081745 = 315081745$

หัวข้อต่อไปจะแสดงถึงผลการศึกษาหลักของบทความนี้ ซึ่งประกอบด้วยข้อสังเกตที่เราพบความสัมพันธ์ของผลคูณของจำนวนเก้าหลัก ที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 จนนำไปสู่การศึกษาและการพิสูจน์ทฤษฎี

บทหลัก อีกทั้งยังให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทหลักด้วย โดยที่เราจะใช้สัญลักษณ์ $\#(1)$ แทนจำนวนของเลขโดด 1 ที่เรียงติดกัน เช่น $\frac{111111}{\#(1)=6}$ และ $\frac{111...1}{\#(1)=9}$ ดังนั้น สำหรับจำนวนเต็ม n ใดๆ จะใช้สัญลักษณ์ $\#(n)$ แทนจำนวนของ n ที่เรียงติดกัน เช่น $\frac{1222...21}{\#(2)=8}$

ข้อสังเกตและรูปแบบทั่วไปที่แน่นอน

จากการสังเกตผลคูณของจำนวนเก้าหลัก ที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 กับจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับเก้า ทำให้เราพบความสัมพันธ์บางอย่างที่น่าสนใจของผลคูณ $\frac{111...1 \times n}{\#(1)=9}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $1 \leq n \leq 9$ และเขียนแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{lll} \#(1)=9: & 111,111,111 \times 1 = 111,111,111 & : \#(1)=9 \\ \#(1)=9: & 111,111,111 \times 2 = 222,222,222 & : \#(2)=9 \\ \#(1)=9: & 111,111,111 \times 3 = 333,333,333 & : \#(3)=9 \\ \#(1)=9: & 111,111,111 \times 4 = 444,444,444 & : \#(4)=9 \\ \#(1)=9: & 111,111,111 \times 5 = 555,555,555 & : \#(5)=9 \quad (II) \\ \#(1)=9: & 111,111,111 \times 6 = 666,666,666 & : \#(6)=9 \\ \#(1)=9: & 111,111,111 \times 7 = 777,777,777 & : \#(7)=9 \\ \#(1)=9: & 111,111,111 \times 8 = 888,888,888 & : \#(8)=9 \\ \#(1)=9: & 111,111,111 \times 9 = 999,999,999 & : \#(9)=9 \end{array}$$

จากผลคูณของจำนวน $\frac{111...1}{\#(1)=9}$ กับจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $1 \leq n \leq 9$ ใน (II) เราสังเกตเห็นว่าจำนวนของเลขโดด 1 ของจำนวน $\frac{111...1}{\#(1)=9}$ กับจำนวนเต็มบวกที่นำมาคูณนั้นมีผลต่อผลคูณนี้ โดยผลคูณนี้จะเป็นจำนวนเก้าหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มบวก n เมื่อ $1 \leq n \leq 9$ นั่นคือ $\frac{111...1 \times n}{\#(1)=9} = \frac{nnn...n}{\#(n)=9}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $1 \leq n \leq 9$

$$-n = \begin{cases} -q \mathbf{0} & ; r=0 \\ -(q+1)(10-r) & ; r \neq 0 \end{cases} \quad (\text{III})$$

ทฤษฎีบท 3 [2] $\langle \mathbb{Z}, \mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นกรุป

บทตั้ง 2 [4] สำหรับทุก $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{Z}\mathcal{R}$ จะได้ว่าตัวผกผันภายใต้ $\boxplus$ ของ $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ คือ $(-x_1)(-x_2)(-x_3)\dots(-x_n)$ นั่นคือ $-(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) = (-x_1)(-x_2)(-x_3)\dots(-x_n)$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{Z}\mathcal{R}$ จะได้ว่า $x_1 x_2 x_3 \dots x_n \boxplus [(-x_1)(-x_2)(-x_3)\dots(-x_n)] = [x_1 + (-x_1)][x_2 + (-x_2)][x_3 + (-x_3)]\dots[x_n + (-x_n)] = \underbrace{000\dots 0}_{\#(0)=n} = 0$ ดังนั้น $-(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)$

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และ P จะได้ว่า $\underbrace{111\dots 1 \times n}_{\#(1)=p} = \underbrace{nnn\dots n}_{\#(n)=p}$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\underbrace{111\dots 1 \times n}_{\#(1)=p} = \underbrace{nnn\dots n}_{\#(n)=p}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เนื่องจาก $\underbrace{111\dots 1 \times 1}_{\#(1)=p} = \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=p}$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(n)$ เป็นจริงจะได้ว่า $\underbrace{111\dots 1 \times n}_{\#(1)=p} = \underbrace{nnn\dots n}_{\#(n)=p}$ เราจะแสดงว่า $P(n+1)$ เป็นจริง พิจารณา $\underbrace{111\dots 1 \times (n+1)}_{\#(1)=p} = \underbrace{(111\dots 1 \times n)}_{\#(1)=p} + \underbrace{(111\dots 1 \times 1)}_y = \underbrace{nnn\dots n}_{\#(n)=p} + \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=p} = \underbrace{(n+1)(n+1)(n+1)\dots(n+1)}_{\#(n+1)=p}$ ฉะนั้น $P(n+1)$ เป็นจริง โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $\underbrace{111\dots 1 \times n}_{\#(1)=p} = \underbrace{nnn\dots n}_{\#(n)=p}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 5 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และ p จะได้ว่า $\underbrace{111\dots 1 \times (-n)}_{\#(1)=p} = \underbrace{(-n)(-n)(-n)\dots(-n)}_{\#(-n)=p}$

การพิสูจน์ โดยบทตั้ง 2 และทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $\underbrace{111\dots 1 \times (-n)}_{\#(1)=p} = -(\underbrace{111\dots 1 \times n}_{\#(1)=p}) - (\underbrace{nnn\dots n}_{\#(n)=p}) = \underbrace{(-n)(-n)(-n)\dots(-n)}_{\#(-n)=p}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ข้อสังเกต สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก P และจำนวนเต็ม q จะได้ว่า $\underbrace{qqq\dots q \times 0}_{\#(q)=p} = \underbrace{000\dots 0}_{\#(0)=p}$

ทฤษฎีบท 6 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก p และจำนวนเต็ม n และ q จะได้ว่า

$$\underbrace{qqq\dots q \times n}_{\#(q)=p} = \underbrace{(q \times n)(q \times n)(q \times n)\dots(q \times n)}_{\#(q \times n)=p}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\underbrace{qqq\dots q \times n}_{\#(q)=p} = \underbrace{(q \times n)(q \times n)(q \times n)\dots(q \times n)}_{\#(q \times n)=p}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n

กรณีที่ 1 n เป็นจำนวนเต็มบวก

เนื่องจาก $\underbrace{qqq\dots q \times 1}_{\#(q)=p} = \underbrace{qqq\dots q}_{\#(q)=p}$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(n)$ เป็นจริง จะได้ว่า $\underbrace{qqq\dots q \times n}_{\#(q)=p} = \underbrace{(q \times n)(q \times n)(q \times n)\dots(q \times n)}_{\#(q \times n)=p}$ เราจะแสดงว่า $P(n+1)$ เป็นจริง พิจารณา $\underbrace{qqq\dots q \times (n+1)}_{\#(q)=p} \times (n+1) = \underbrace{(qqq\dots q \times n)}_{\#(q \times n)=p} + \underbrace{(qqq\dots q \times 1)}_{\#(q)=p} = \underbrace{(q \times n)(q \times n)(q \times n)\dots(q \times n)}_{\#(q \times n)=p} + \underbrace{qqq\dots q}_{\#(q)=p} = \underbrace{((q \times n) + q)((q \times n) + q)\dots((q \times n) + q)}_{\#(q \times (n+1))=p} = \underbrace{(q \times (n+1))(q \times (n+1))(q \times (n+1))\dots(q \times (n+1))}_{\#(q \times (n+1))=p}$ ฉะนั้น $P(n+1)$ เป็นจริง โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\underbrace{qqq\dots q \times n}_{\#(q)=p} = \underbrace{(q \times n)(q \times n)(q \times n)\dots(q \times n)}_{\#(q \times n)=p}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

กรณีที่ 2 n เป็นจำนวนเต็มลบ

จะได้ว่า $n = -m$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก m โดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $\underbrace{qqq\dots q \times n}_{\#(q)=p} = \underbrace{qqq\dots q \times (-m)}_{\#(q)=p} = -(\underbrace{qqq\dots q \times m}_{\#(q)=p}) = -(\underbrace{(q \times m)(q \times m)(q \times m)\dots(q \times m)}_{\#(q \times m)=p}) = \underbrace{(q \times (-m))(q \times (-m))(q \times (-m))\dots(q \times (-m))}_{\#(q \times (-m))=p} = \underbrace{(q \times n)(q \times n)(q \times n)\dots(q \times n)}_{\#(q \times n)=p}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มลบ n

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ $\underbrace{666\dots 6 \times n}_{\#(6)=14}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $1 \leq n \leq 9$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \underbrace{666\dots 6}_{\#(6)=14} \times 1 &= \underbrace{666\dots 6}_{\#(6)=14} = \underbrace{666\dots 6}_{\#(6)=14} = 66,666,666,666,666 \\
 \underbrace{666\dots 6}_{\#(6)=14} \times 2 &= \underbrace{(12)(12)(12)\dots(12)}_{\#(12)=14} = \underbrace{1_1 2_1 2_1 \dots 1_1 2}_{\#(1_2)=14} = 133,333,333,333,332 \\
 \underbrace{666\dots 6}_{\#(6)=14} \times 3 &= \underbrace{(18)(18)(18)\dots(18)}_{\#(18)=14} = \underbrace{1_1 8_1 8_1 \dots 1_1 8}_{\#(1_8)=14} = 199,999,999,999,998 \\
 \underbrace{666\dots 6}_{\#(6)=14} \times 4 &= \underbrace{(24)(24)(24)\dots(24)}_{\#(24)=14} = \underbrace{2_2 4_2 4_2 \dots 2_2 4}_{\#(2_4)=14} = 266,666,666,666,664 \\
 \underbrace{666\dots 6}_{\#(6)=14} \times 5 &= \underbrace{(30)(30)(30)\dots(30)}_{\#(30)=14} = \underbrace{3_3 0_3 0_3 \dots 3_3 0}_{\#(3_0)=14} = 333,333,333,333,330 \\
 \underbrace{666\dots 6}_{\#(6)=14} \times 6 &= \underbrace{(36)(36)(36)\dots(36)}_{\#(36)=14} = \underbrace{3_3 6_3 6_3 \dots 3_3 6}_{\#(3_6)=14} = 399,999,999,999,996 \\
 \underbrace{666\dots 6}_{\#(6)=14} \times 7 &= \underbrace{(42)(42)(42)\dots(42)}_{\#(42)=14} = \underbrace{4_4 2_4 2_4 \dots 4_4 2}_{\#(4_2)=14} = 466,666,666,666,662 \\
 \underbrace{666\dots 6}_{\#(6)=14} \times 8 &= \underbrace{(48)(48)(48)\dots(48)}_{\#(48)=14} = \underbrace{4_4 8_4 8_4 \dots 4_4 8}_{\#(4_8)=14} = 533,333,333,333,328 \\
 \underbrace{666\dots 6}_{\#(6)=14} \times 9 &= \underbrace{(54)(54)(54)\dots(54)}_{\#(54)=14} = \underbrace{5_5 4_5 4_5 \dots 5_5 4}_{\#(5_4)=14} = 599,999,999,999,994
 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์

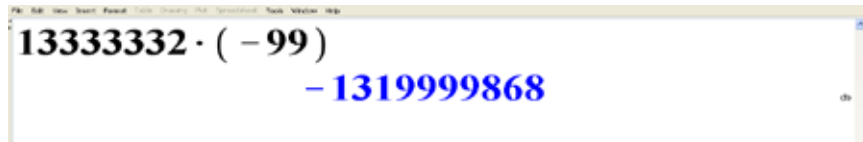
6666666666666666 - 1	6666666666666666	133
6666666666666666 - 2	1333333333333332	133
6666666666666666 - 3	1999999999999998	133
6666666666666666 - 4	2666666666666664	133
6666666666666666 - 5	3333333333333330	133
6666666666666666 - 6	3999999999999996	133
6666666666666666 - 7	4666666666666662	133
6666666666666666 - 8	5333333333333328	133
6666666666666666 - 9	5999999999999994	133

ภาพที่ 1 : ผลคูณ $\underbrace{666\dots 6}_{\#(6)=14} \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $1 \leq n \leq 9$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลลัพธ์ของ $\underbrace{(12)(12)(12)\dots(12)}_{\#(12)=7} \times (-99)$
 วิธีทำ โดยบทตั้ง 2 และทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $\underbrace{(12)(12)(12)\dots(12)}_{\#(12)=7} \times (-99) =$

$$\begin{aligned} \underbrace{(-1188)(-1188)(-1188)\dots(-1188)}_{\#(-1188)=7} &= -\underbrace{((1188)(1188)(1188)\dots(1188))}_{\#(1188)=7} = \\ -\underbrace{(-1188_{118}8_{118}8_{118}8\dots1188)}_{\#(1188)=7} &= -\underbrace{((118)(126)(126)(126)\dots(126)8)}_{\#(126)=6} = -\underbrace{(-118_{12}6_{12}6_{12}6\dots1268)}_{\#(126)=6} = \\ -\underbrace{(-130_{13}(18)(18)(18)\dots(18)68)}_{\#(18)=5} &= -\underbrace{(-130_{13}8_18_18\dots1868)}_{\#(18)=5} = -\underbrace{(131999\dots9868)}_{\#(9)=4} = \end{aligned}$$

-1319999868 จากการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ จะได้ว่า $\underbrace{(12)(12)(12)\dots(12)}_{\#(12)=7} = \underbrace{12_12_12\dots12}_{\#(12)=7} = \underbrace{1333\dots32}_{\#(3)=6}$
 ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์



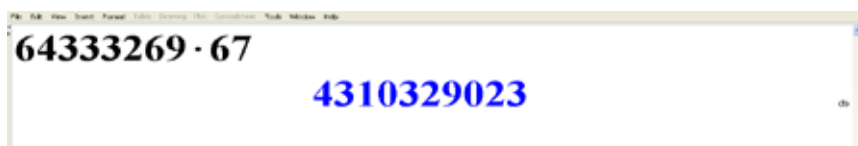
ภาพที่ 2 : ผลคูณ $\underbrace{(12)(12)(12)\dots(12)}_{\#(12)=7} \times (-99)$

ตัวอย่าง 4 จงหาผลลัพธ์ของ $\underbrace{(579)(579)(579)\dots(579)}_{\#(579)=6} \times 67$
 วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $\underbrace{(579)(579)(579)\dots(579)}_{\#(579)=6} \times 67 =$

$$\begin{aligned} \underbrace{(38793)(38793)(38793)\dots(38793)}_{\#(38793)=6} &= \underbrace{3879^3_{3879}3879^3_{3879}3\dots3879^3}_{\#(3879^3)=6} = \\ \underbrace{(3879)(3882)(3882)(3882)\dots(3882)3}_{\#(3882)=5} &= 387^9_{388}2_{388}2_{388}2\dots23_{388} = \\ \underbrace{(387)(397)(390)(390)(390)(390)23}_{\#(390)=4} &= 38^7_{39}7_{39}0_{39}0_{39}0_{39}023_{39} = \\ \underbrace{(38)(46)(46)(39)(39)(39)023}_{\#(39)=3} &= \underbrace{38_46_46_39_39_39023}_{\#(39)=3} = \underbrace{3(12)(10)9(12)(12)9023}_{\#(12)=2} = \end{aligned}$$

$3_12_109_12_129023 = 430(10)329023 = 430_10329023 = 4310329023$ จากการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ จะได้ว่า $\underbrace{(579)(579)(579)\dots(579)}_{\#(579)=6} = 64333269$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์



ภาพที่ 3 : ผลคูณ $\underbrace{(579)(579)(579)\dots(579)}_{\#(579)=6} \times 67$

บทสรุปและการอภิปรายผล

จากข้อสงสัยของเราจนกระทั่งสามารถพิสูจน์ข้อสังเกตเป็นรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ของผลคูณของจำนวนเต็มใดๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน โดยอาศัยจำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้เราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนเต็มใดๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกันได้ และสรุปเป็นสูตรสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก p และจำนวนเต็ม n และ q ได้ดังนี้
$$\underbrace{qqq\dots q}_{\#(q)=p} \times n = \underbrace{(q \times n)(q \times n)(q \times n)\dots(q \times n)}_{\#(q \times n)=p}$$
 และรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณนี้ยังมีลักษณะเหมือนกับข้อสังเกตที่เราพบใน ด้วยสูตรจากบทความนี้จึงเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นและแสดงให้เห็นลักษณะที่สวยงามในแบบคณิตศาสตร์นั่นเอง

จากบทความนี้และบทความอื่นๆ ที่ได้กล่าวถึงผู้อ่านจะสังเกตเห็นว่าจำนวนเศษเหลือมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตต่างๆ ฉะนั้นหากผู้อ่านเริ่มทำการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่น่าสนใจของจำนวนเต็มเช่นเดียวกับบทความนี้ก็คาดว่าจะได้สูตรสำหรับการคำนวณเช่นกันและสูตรที่ได้จากการศึกษาจะเป็นการช่วยเพิ่มความสะดวกในการคำนวณต่างๆ และนอกจากผลการศึกษาที่ได้รับแล้ว ผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของรูปแบบทั่วไปและการพิสูจน์อีกด้วย

คำขอบคุณ

บทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย : Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA) ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่านสำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์

เอกสารอ้างอิง

- [1] อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2554). ความสวยงามวงนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารนเรศวรพะเยา. 4 (2), 29-35.
- [2] ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวงนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. วารสารนเรศวรพะเยา. 6(1), อยู่ระหว่างการตีพิมพ์.
- [3] ณัฐพงษ์ พรหมวงษ์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวงนัยทั่วไป : ผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 (เลข 6) ยกเว้นหลักหน่วยเป็นเลข 4 (เลข 7). วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏกาญจนบุรี. 1(1), 41-49.
- [4] แสงประทีป นนกระโทก และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวงนัยทั่วไป : ผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6. วารสารวิทยาศาสตร์แห่งมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี. อยู่ระหว่างการแก้ไข.
- [5] อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวงนัยทั่วไป : การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม. วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรดิตถ์. อยู่ระหว่างการพิจารณา.
- [6] Clark, W. E. (2002). **Elementary Number Theory**. Department of Mathematics, University of South Florida, USA. Retrieved August 30, 2012 from http://shell.cas.usf.edu/~wclark/elementary_th_book.pdf
- [7] อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวงนัยทั่วไป : จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. วารสารวิทยาศาสตร์ มข. 41(3), อยู่ระหว่างการตีพิมพ์.
- [8] Rotman, J. J. (2005). **A First Course in Abstract Algebra**. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA.