



บทความวิจัย

รากจริงของผลบวกบางชุดของพหุนามเชบีเชฟ

Real Zeros of Certain Sums of Chebyshev Polynomials

อลงกรณ์ แซ่ต้ง

กศ.ม. (คณิตศาสตร์)

Alongkorn Sae-Tung

M.Ed. (Mathematics)

อาจารย์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จ.สงขลา 90000

Mathematics Department, Faculty of Science, Thaksin University, Songkhla 90000

คำสำคัญ : พหุนามเชบีเชฟ (Chebyshev polynomial) รากจริง (real zero)

Abstract

The functions defined by $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ for $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ are called Chebyshev polynomials of the first kind. In this paper, we find all real zeros of $T_m(x) + T_n(x)$, $\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x)$ and $\sum_{k=0}^{3^n-1} T_k(x)$.

บทคัดย่อ

ฟังก์ชันที่นิยามโดย $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ สำหรับ $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ เรียกว่า พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่ง บทความนี้แสดงการหารากจริงทั้งหมดของ $T_m(x) + T_n(x)$, $\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x)$ และ $\sum_{k=0}^{3^n-1} T_k(x)$.

1. บทนำ

พหุนามเชบีเชฟมี 2 รูปแบบ คือ ชนิดที่ 1 และ ชนิดที่ 2 ซึ่งเขียนแทนด้วย $T_n(x)$ และ $U_n(x)$ ตามลำดับ ทั้ง $T_n(x)$ และ $U_n(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n ที่มีการประยุกต์ในหลายสาขา เช่น การประมาณพหุนาม (polynomial approximation) การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) ทฤษฎีกราฟ (graph theory) อนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier series) ฯลฯ พหุนามเชบีเชฟทั้งหมดที่กล่าวในบทความวิจัยนี้เป็นพหุนามเชบีเชฟชนิดที่ 1 ซึ่งนิยามดังนี้

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

สำหรับ $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ และ $x \in [-1, 1]$ ให้ $\theta = \arccos x$ จะได้ $x = \cos \theta$ และ $T_n(x) = \cos n\theta$ ดังนั้นจึงสามารถนิยามพหุนามเชบีเชฟโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ดังนี้

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

เมื่อ $T_0(x) = 1$ และ $T_1(x) = x$ และ $x \in [-1, 1]$ เพราะฉะนั้นจะได้พหุนามเชบีเชฟ 8 พจน์แรกดังนี้

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\ T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \end{aligned}$$

นอกจากนี้ยังสามารถเขียนพหุนามเชบีเชฟในรูปของผลบวกได้ดังนี้

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^r}{n-r} \binom{n-r}{r} (2x)^{n-2r}$$

หรือ

$$T_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} x^{n-2m} (x^2 - 1)^m$$

เมื่อ $\lfloor x \rfloor$ เป็นฟังก์ชันขั้นพื้น (floor function) หรือเขียนในรูปของผลคูณได้ดังนี้

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \left\{ x - \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right] \right\}$$

เพราะฉะนั้นพหุนามเชบีเชฟ $T_n(x)$ ซึ่งมีดีกรี n จะมีรากที่แตกต่างกันทั้งหมด n ราก ซึ่งเรียกว่า รากเชบีเชฟ (Chebyshev zeros) หรือบัพเชบีเชฟ (Chebyshev node) ในช่วง $[-1, 1]$ และรากของ $T_n(x)$ คือ

$$x_k = \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right]$$

สำหรับ $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

บทความนี้แสดงการหารากจริงทั้งหมดของ $T_m(x) + T_n(x)$, $\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x)$ และ $\sum_{k=0}^{3^n-1} T_k(x)$

2. ความรู้พื้นฐาน

เนื่องจาก $\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x)$ และ $\sum_{k=0}^{3^n-1} T_k(x)$ เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันโคไซน์และลำดับเลขคณิต ดังนั้นจะ

ขอกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเอกลักษณ์ตรีโกณมิติและลำดับเลขคณิต

บทตั้ง 2.1 ถ้า $m, n \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$\begin{aligned} \cos m\theta + \cos n\theta &= \\ 2 \cos \frac{(m+n)\theta}{2} \cos \frac{(m-n)\theta}{2} \end{aligned}$$

บทตั้ง 2.2 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกคงตัวซึ่ง $n \geq 2$ ถ้า $\{a_n\}_{k=0}^{2^n-1}$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม d แล้ว

$$\left\{ \frac{a_{2k+1} + a_{2k}}{2} \right\}_{k=0}^{2^{n-1}-1}$$

เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม $2d$ และ

$$\left\{ \frac{a_{2k+1} - a_{2k}}{2} \right\}_{k=0}^{2^{n-1}-1} = \left\{ \frac{d}{2} \right\}_{k=0}^{2^{n-1}-1}$$

เป็นลำดับคงตัว

บทตั้ง 2.3 ถ้า $n, d \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$\begin{aligned} \cos(n+d)\theta + \cos n\theta + \cos(n-d)\theta &= \\ (\cos n\theta)(2 \cos d\theta + 1) \end{aligned}$$

การพิสูจน์ ให้ $n, d \in \mathbb{R}$ โดยบทตั้ง 2.1 จะได้

$$\begin{aligned} \cos(n+d)\theta + \cos(n-d)\theta &= \\ 2 \cos \frac{[(n+d) + (n-d)]\theta}{2} &= \\ \cos \frac{[(n+d) - (n-d)]\theta}{2} &= \\ 2 \cos n\theta \cos d\theta \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} & \cos(n+d)\theta + \cos n\theta + \cos(n-d)\theta \\ &= 2 \cos n\theta \cos d\theta + \cos n\theta \\ &= (\cos n\theta)(2 \cos d\theta + 1) \end{aligned}$$

□

บทตั้ง 2.4 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $3 \mid n$ ถ้า $\{a_n\}_{k=0}^{n-1}$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม d แล้ว ลำดับย่อย $\{a_{3k-1}\}_{k=0}^{n-1}$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม $3d$

เนื่องจากพหุนามเชบีเชฟ $T_n(x)$ นิยามบนช่วง $[-1, 1]$ ดังนั้นถ้า $x \notin [-1, 1]$ แล้ว $T_n(x)$ ไม่นิยาม ส่งผลให้รากจริงของผลบวกใดๆ ของพหุนามเชบีเชฟต้องอยู่ในช่วง $[-1, 1]$ แต่ถ้าอนุญาตให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วรากจริงของ $T_m(x) + T_n(x)$ และ $\sum_{k=0}^n T_k(x)$ เมื่อ $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ยังอยู่ในช่วง $[-1, 1]$ หรือไม่ ทฤษฎีบท 2 บทต่อไปนี้จะตอบคำถามดังกล่าว

ทฤษฎีบท 2.5 ถ้า $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ที่ $m > n$ แล้ว $T_m(x) + T_n(x)$ ไม่มีรากจริงในช่วง $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

การพิสูจน์ ให้ $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ที่ $m > n$ จากพหุนามเชบีเชฟในรูปของผลคูณ

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \left[x - \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right] \right]$$

ถ้า $x > 1$ แล้ว $T_n(x) > 0$ สำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ดังนั้น $T_m(x) + T_n(x) > 0$ ส่งผลให้ $T_m(x) + T_n(x)$ ไม่มีรากจริงในช่วง $(1, \infty)$

ถ้า $x < -1$ แล้ว $T_n(x) > 0$ สำหรับทุก $n \in \{0, 2, 4, \dots\}$ และ $T_n(x) < 0$ สำหรับ $n \in \{1, 3, 5, \dots\}$ ดังนั้น ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า

$T_m(x) + T_n(x) > 0$ ถ้า m และ n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $T_m(x) + T_n(x) < 0$ ต่อไปจะแสดงว่า $\left| \frac{T_{n+1}(x)}{T_n(x)} \right| > 1$ สำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ เนื่องจากพหุนามเชบีเชฟนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

เมื่อ $T_0(x) = 1$ และ $T_1(x) = x$ ดังนั้น

$$\frac{T_1(x)}{T_0(x)} = x < -1$$

ส่งผลให้

$$\left| \frac{T_1(x)}{T_0(x)} \right| > 1$$

สมมติว่า

$$\left| \frac{T_k(x)}{T_{k-1}(x)} \right| > 1$$

สำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 1$ เนื่องจาก $T_n(x) > 0$ สำหรับทุก $n \in \{0, 2, 4, \dots\}$ และ $T_n(x) < 0$ สำหรับ $n \in \{1, 3, 5, \dots\}$ ดังนั้น

$$\frac{T_k(x)}{T_{k-1}(x)} < -1$$

ส่งผลให้

$$\begin{aligned} \frac{T_{k+1}(x)}{T_k(x)} &= \frac{2xT_k(x) - T_{k-1}(x)}{T_k(x)} \\ &= 2x - \frac{T_{k-1}(x)}{T_k(x)} \\ &= 2x + \left| \frac{T_{k-1}(x)}{T_k(x)} \right| \end{aligned}$$

เนื่องจาก $2x < -2$ และ $\left| \frac{T_{k-1}(x)}{T_k(x)} \right| < 1$ จึงได้ว่า

$$\frac{T_{k+1}(x)}{T_k(x)} = 2x + \left| \frac{T_{k-1}(x)}{T_k(x)} \right| < -1$$

เพราะฉะนั้น

$$\left| \frac{T_{k+1}(x)}{T_k(x)} \right| > 1$$

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $\left| \frac{T_{n+1}(x)}{T_n(x)} \right| > 1$ สำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ สมมติว่า $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ที่ $m > n$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \left| \frac{T_m(x)}{T_n(x)} \right| &= \left| \frac{T_m(x)}{T_{m-1}(x)} \cdot \frac{T_{m-1}(x)}{T_{m-2}(x)} \cdots \frac{T_{n+1}(x)}{T_n(x)} \right| \\ &= \left| \frac{T_m(x)}{T_{m-1}(x)} \right| \left| \frac{T_{m-1}(x)}{T_{m-2}(x)} \right| \cdots \left| \frac{T_{n+1}(x)}{T_n(x)} \right| \\ &> 1 \end{aligned}$$

นั่นคือ $|T_m(x)| - |T_n(x)| > 0$ ถ้า m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

$$T_m(x) + T_n(x) = |T_m(x)| - |T_n(x)| > 0$$

และถ้า m เป็นจำนวนคี่ และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว

$$T_m(x) + T_n(x) = |T_m(x)| + |T_n(x)| < 0$$

จึงสรุปได้ว่า $T_m(x) + T_n(x)$ ไม่มีรากในช่วง $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

□

ทฤษฎีบท 2.6 ถ้า $n \in \mathbb{Z}^+$ แล้ว $\sum_{k=0}^n T_k(x)$ ไม่มีรากจริงในช่วง $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

การพิสูจน์ ให้ $n \in \mathbb{Z}^+$ จากพหุนามเชบีเชฟในรูปของผลคูณ

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \left\{ x - \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right] \right\}$$

ถ้า $x > 1$ แล้ว $T_k(x) > 0$ สำหรับ $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ดังนั้น $\sum_{k=0}^n T_k(x) > 0$ เพราะฉะนั้น $\sum_{k=0}^n T_k(x)$ ไม่มีรากจริงในช่วง $(1, \infty)$

ถ้า $x < -1$ จากการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 2.5 จะได้ว่า $|T_{k+1}(x)| - |T_k(x)| > 0$ สำหรับทุก $k \in \{0, 1,$

$2, \dots\}$ ดังนั้น ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n T_k(x) &= T_0(x) + T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) \\ &\quad + \dots + T_{n-1}(x) + T_n(x) \\ &= (|T_0(x)| - |T_1(x)|) + (|T_2(x)| - |T_3(x)|) + \dots + (|T_{n-1}(x)| - |T_n(x)|) \\ &< 0 \end{aligned}$$

ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n T_k(x) &= T_0(x) + T_1(x) + T_2(x) + \dots \\ &\quad + T_{n-1}(x) + T_n(x) \\ &= T_0(x) + (-|T_1(x)| + |T_2(x)|) \\ &\quad + \dots + (-|T_{n-1}(x)| + |T_n(x)|) \\ &> 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{k=0}^n T_k(x)$ ไม่มีรากจริงในช่วง $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

□

จากทฤษฎีบท 2.5 สรุปได้ว่า ถ้า $T_m(x) + T_n(x)$ มีรากจริง แล้วรากจริงทั้งหมดต้องอยู่ในช่วง $[-1, 1]$ ในทำนองเดียวกัน จากทฤษฎีบท 2.6 สรุปได้ว่า ถ้า $\sum_{k=0}^n T_k(x)$ มีรากจริง แล้วรากจริงทั้งหมดต้องอยู่ในช่วง $[-1, 1]$

3. ผลลัพธ์หลัก

จะเริ่มหัวข้อนี้ด้วยการหารากจริงทั้งหมดของผลบวกของพหุนามเชบีเชฟ 2 พหุนามใด ๆ

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ และ $m > n$ ถ้า $T_m(x)$ และ $T_n(x)$ เป็นพหุนาม เชบีเชฟดีกรี m และ n ตามลำดับ แล้วเซตของรากจริงทั้งหมดของ $T_m(x) + T_n(x)$ คือ

$$\left\{ \cos \frac{(2p-1)\pi}{m+n} : p \in \left[1, \frac{m+n+1}{2}\right] \cap \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \cos \frac{(2q-1)\pi}{m-n} : q \in \left[1, \frac{m-n+1}{2}\right] \cap \mathbb{Z} \right\}$$

$$\left\{ \cos \frac{(2q-1)\pi}{m-n} : q \in \left[1, \frac{m-n+1}{2}\right] \cap \mathbb{Z} \right\}$$

□

การพิสูจน์ ให้ $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ และ $m > n$
เนื่องจาก

$$\begin{aligned} T_m(x) + T_n(x) &= \cos m\theta + \cos n\theta \\ &= 2 \cos \frac{(m+n)\theta}{2} \cos \frac{(m-n)\theta}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos \frac{(m+n)\theta}{2} = 0$ หรือ $\cos \frac{(m-n)\theta}{2} = 0$
ถ้า $\cos \frac{(m+n)\theta}{2} = 0$ จะได้

$$\frac{(m+n)\theta}{2} = \frac{(2p-1)\pi}{2}$$

สำหรับทุก $p \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น

$$\theta = \frac{(2p-1)\pi}{m+n}$$

สำหรับทุก $p \in \mathbb{Z}$ เนื่องจาก $\theta \in [0, \pi]$ ดังนั้น

$p \in \left[1, \frac{m+n+1}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$ ในทำนองเดียวกัน ถ้า

$\cos \frac{(m-n)\theta}{2} = 0$ จะได้

$$\frac{(m-n)\theta}{2} = \frac{(2q-1)\pi}{2}$$

สำหรับทุก $q \in \mathbb{Z}$ เพราะฉะนั้น

$$\theta = \frac{(2q-1)\pi}{m-n}$$

สำหรับทุก $q \in \mathbb{Z}$ เนื่องจาก $\theta \in [0, \pi]$ ดังนั้น $q \in \left[1, \frac{m-n+1}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$ ดังนั้นเซตของรากจริงทั้งหมดของ

$T_m(x) + T_n(x)$ คือ

$$\left\{ \cos \frac{(2p-1)\pi}{m+n} : p \in \left[1, \frac{m+n+1}{2}\right] \cap \mathbb{Z} \right\} \cup$$

ต่อไปเป็นการหารากจริงทั้งหมดของ $\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x)$ โดยการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ $i, j \in \mathbb{Z}$, n เป็นจำนวนเต็มบวก
คงตัว และ $T_k(x)$ เป็นพหุนามเชบีเชฟพจน์ที่ k เซตของ
รากจริงทั้งหมดของ $\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x)$ คือ

$$\left\{ \cos \frac{(2i+1)\pi}{2^{j-1}} : j \in [1, n] \text{ และ } i \in \left[0, \frac{2^{j-1}-1}{2}\right] \right\} \cup \left\{ \cos \frac{(2i+1)\pi}{2^n-1} : i \in [0, 2^{n-1}-1] \right\}$$

การพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกคงตัวและ $\theta = \arccos x$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x) &= \cos 0 + \cos \theta + \dots \\ &+ \cos(2^n - 2)\theta + \cos(2^n - 1)\theta \end{aligned}$$

เห็นได้ชัดว่าลำดับของสัมประสิทธิ์ของ θ ($0, 1, \dots, 2^n - 2, 2^n - 1$) เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม 1 โดย
บทตั้ง 2.1 และ 2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x) &= 2 \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \left[\cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} + \dots \right. \\ &\left. + \cos \frac{(2^{n+1}-3)\theta}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^2 \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) (\cos \theta) \left[\cos \frac{3\theta}{2} + \right. \\
 &\quad \left. \cos \frac{11\theta}{2} + \dots + \cos \frac{(2^{n+1} - 5)\theta}{2} \right] \\
 &= 2^3 \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) (\cos \theta) (\cos 2\theta) \left[\cos \frac{7\theta}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \cos \frac{23\theta}{2} + \dots + \cos \frac{(2^{n+1} - 9)\theta}{2} \right]
 \end{aligned}$$

ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x) = 2^n \left[\cos \frac{(2^n-1)\theta}{2} \right] \prod_{j=1}^n \cos(2^{j-2}\theta)$$

เพื่อหารากจริงของ $\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x)$ เราจะกำหนดให้

$$2^n \left[\cos \frac{(2^n-1)\theta}{2} \right] \prod_{j=1}^n \cos(2^{j-2}\theta) = 0$$

ดังนั้น $\cos \frac{(2^n-1)\theta}{2} = 0$ หรือ $\cos(2^{j-2}\theta) = 0$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $j \in [1, n]$ เนื่องจาก $\cos \frac{(2i+1)\pi}{2} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น

$$\theta = \frac{(2i+1)\pi}{2^{j-1}}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $j \in [1, n]$ และสำหรับทุก $i \in [0, \frac{2^{j-1}-1}{2}]$ หรือ

$$\theta = \frac{(2i+1)\pi}{2^n-1}$$

สำหรับทุก $i \in [0, 2^{n-1}-1]$ เนื่องจากรากจริงของ $\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x)$ คือ จำนวนจริง x ทุกค่าที่ทำให้ $\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x) = 0$ และเราทราบว่า $x = \cos \theta$ ดังนั้นเซตของรากจริงทั้งหมดของ $\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x)$ คือ

$$\left\{ \cos \frac{(2i+1)\pi}{2^{j-1}} : j \in [1, n] \text{ และ } i \in \left[0, \frac{2^{j-1}-1}{2} \right] \right\} \cup \left\{ \cos \frac{(2i+1)\pi}{2^n-1} : \right.$$

$$\left. i \in [0, 2^{n-1}-1] \right\}$$

□

สุดท้ายจะเป็นการหารากจริงของ $\sum_{k=0}^{3^n-1} T_k(x)$ โดยการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกคงตัว $\mathbb{Z}(n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ และ $T_k(x)$ เป็นพหุนามเชบีเชฟพจน์ที่ k เซตของรากจริงทั้งหมดของ $\sum_{k=0}^{3^n-1} T_k(x)$ คือ

$$\left\{ \cos \frac{(2i+1)\pi}{3^n-1} : i \in \left[0, \frac{3^n-2}{2} \right] \cap \mathbb{Z} \right\} \cup$$

$$\left\{ \cos \frac{(6x+2)\pi}{3^{j+1}} : j \in \mathbb{Z}(n) \text{ และ } \right.$$

$$\left. x \in \left[0, \frac{3^{j+1}-2}{6} \right] \cap \mathbb{Z} \right\} \cup$$

$$\left\{ \cos \frac{(6y+4)\pi}{3^{j+1}} : j \in \mathbb{Z}(n) \text{ และ } \right.$$

$$\left. y \in \left[0, \frac{3^{j+1}-4}{6} \right] \cap \mathbb{Z} \right\}$$

การพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกคงตัว $\mathbb{Z}(n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ $T_k(x)$ เป็นพหุนามเชบีเชฟพจน์ที่ k และ $\theta = \arccos x$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{3^n-1} T_k(x) &= \cos 0 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots \\
 &\quad + \cos(3^n-1)\theta
 \end{aligned}$$

เห็นได้ชัดว่าลำดับของสัมประสิทธิ์ของ θ ($0, 1, 2, \dots, 3^n-1$) เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม 1 โดยบทตั้ง 2.3 และ 2.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{3^n-1} T_k(x) &= (2 \cos \theta + 1)[\cos \theta + \cos 4\theta + \\ &\quad \cos 7\theta + \dots + \cos(3^n - 2)\theta] \\ &= \cos \frac{(3^n - 1)\theta}{2} \prod_{j=0}^{n-1} (2 \cos 3^j \theta + 1) \end{aligned}$$

เพื่อหารากจริงของ $\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x)$ เราจะกำหนดให้

$$\cos \frac{(3^n - 1)\theta}{2} \prod_{j=0}^{n-1} (2 \cos 3^j \theta + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \cos \frac{(3^n - 1)\theta}{2} = 0 \text{ หรือ } \prod_{j=0}^{n-1} (2 \cos 3^j \theta + 1) \\ = 0 \text{ ถ้า } \cos \frac{(3^n - 1)\theta}{2} = 0 \text{ จะได้} \\ \theta = \frac{(2i + 1)\pi}{3^n - 1} \end{aligned}$$

สำหรับทุก $i \in \left[0, \frac{3^n - 2}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$ ถ้า

$$\prod_{j=0}^{n-1} (2 \cos 3^j \theta + 1) = 0 \text{ จะได้ } \cos 3^j \theta = -\frac{1}{2}$$

เนื่องจาก $\cos(2x\pi + \frac{2\pi}{3}) = \cos(2y\pi + \frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$
สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{Z}$ ดังนั้นสำหรับแต่ละค่าของ $j \in \mathbb{Z}(n)$

$$\theta = \frac{(6x + 2)\pi}{3^{j+1}}$$

สำหรับทุก $x \in \left[0, \frac{3^{j+1} - 2}{6}\right] \cap \mathbb{Z}$ หรือสำหรับแต่ละ

ค่าของ $j \in \mathbb{Z}(n)$

$$\theta = \frac{(6y + 4)\pi}{3^{j+1}}$$

สำหรับทุก $y \in \left[0, \frac{3^{j+1} - 4}{6}\right] \cap \mathbb{Z}$ ดังนั้นเซตของ

รากจริงทั้งหมดของ $\sum_{k=0}^{3^n-1} T_k(x)$ คือ

$$\left\{ \cos \frac{(2i + 1)\pi}{3^n - 1} : i \in \left[0, \frac{3^n - 2}{2}\right] \cap \mathbb{Z} \right\} \cup$$

$$\left\{ \cos \frac{(6x + 2)\pi}{3^{j+1}} : j \in \mathbb{Z}(n) \text{ และ}$$

$$x \in \left[0, \frac{3^{j+1} - 2}{6}\right] \cap \mathbb{Z} \right\} \cup$$

$$\left\{ \cos \frac{(6y + 4)\pi}{3^{j+1}} : j \in \mathbb{Z}(n) \text{ และ}$$

$$y \in \left[0, \frac{3^{j+1} - 4}{6}\right] \cap \mathbb{Z} \right\}$$

□

4. สรุปผลและข้อเสนอแนะ

บทความวิจัยนี้ได้หารากจริงทั้งหมดของ $T_m(x) + T_n(x)$, $\sum_{k=0}^{2^n-1} T_k(x)$ และ $\sum_{k=0}^{3^n-1} T_k(x)$ ผู้สนใจสามารถทำงานวิจัยต่อยอดที่มีนัยทั่วไปมากขึ้นได้โดยตอบปัญหาต่อไปนี้

ปัญหา 4.1 หารากทั้งหมดของ $\sum_{k=0}^n T_k(x)$

ปัญหา 4.2 หารากทั้งหมดของ $\sum_{k=0}^n T_{a_k}(x)$ เมื่อ $\{a_k\}_{k=0}^n$ เป็นลำดับเลขคณิตเพิ่ม (increasing arithmetic sequence) ของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

5. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณรองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย ชำนิ ที่จุดประกายและให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ในการทำวิจัย และรองศาสตราจารย์ ดร.สมใจ จิตพิทักษ์ ที่ได้ให้ข้อมูลคำแนะนำ และตรวจสอบความถูกต้องของทฤษฎีบทต่างๆ ในบทความนี้ ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิที่บรรณาธิการเชิญเป็นผู้อ่านและประเมินคุณภาพบทความ รวมทั้งให้คำแนะนำในการปรับปรุงแก้ไข ขอขอบคุณภาควิชาคณิตศาสตร์ที่เอื้อเฟื้ออุปกรณ์และสิ่งอำนวยความสะดวก



ในการเตรียมบทความ และขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยทักษิณที่กรุณาให้ทุนสนับสนุนในการทำวิจัย

6. เอกสารอ้างอิง

Kim, S. H. (2001). Zeros of Certain Sums of Two Polynomials. J. Math. Anal. Appl (260), 239 - 250.

Kincaid, D. and Cheney, W. (2002). Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computation. 3rd ed. CA : Pacific Grove.

Kreyzig, E. (1989). Introductory Functional Analysis with Applications. New York : Wiley.

Pinter, A. (2002). Zeros of the Sum of Polynomials. J. Math. Anal. Appl (270), 303 - 305.