

บทความวิชาการ

ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์กรณีสองฟังก์ชัน

สุวิชา ขวัญทอง

นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์

Suwicha Khanthong

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

สมใจ จิตพิทักษ์

กศ.ด. (พัฒนศึกษาศาสตร์)

Somjai Jitpitak

Ed.D.(Dev.Ed.)

รองศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

1. บทนำ

ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าจริง $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ f ต่อเนื่องกล่าวว่า

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a) \quad (a)$$

สำหรับบางค่า $c \in (a, b)$ กรณีสองฟังก์ชันคือ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ f ต่อเนื่อง และ g หาปริพันธ์รีมันน์ได้และไม่เป็นลบ จะมี $c \in (a, b)$ ที่

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx \quad (b)$$

กรณี f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันเพิ่ม g หาปริพันธ์รีมันน์ได้และไม่เป็นลบ จะมี $c \in (a, b)$ ที่

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^c g(x) dx + f(b) \int_c^b g(x) dx \quad (c)$$

และกรณี f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะมี $c \in (a, b)$ ที่

$$\int_a^c f(x)g(x) dx + \int_c^b f(x) dx = f(c)(c - a) - f(c)g(c)(c - b) \quad (d)$$

การพิสูจน์ (a) จะหาได้ในตำราแคลคูลัสทั่วไป กรณีสองฟังก์ชัน (b) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส Pierre Ossian Bonnet (ค.ศ.1819-1892) ได้พิสูจน์ไว้ซึ่งจะได้กล่าวถึงและพิสูจน์ในตอนที่สาม (ทฤษฎีบท 3.1) การพิสูจน์ (c) และ (d) แนวคิดหลักได้จาก [2] และ [3]

2. ความรู้พื้นฐาน

ฟังก์ชันค่าจริง f บนช่วงปิด $[a, b]$ จะเขียนแทนด้วย $f(c)(c-a) - f(c)g(c)(c-b)$ โดยที่ $\mathbb{R}$ คือเซตของจำนวนจริง

บทนิยาม 2.1 ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) \leq f(x_2)$ ทุก $x_1, x_2 \in [a, b]$ เรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันไม่เป็นลบ (non-negative function) ถ้า $f(x) \geq 0$ ทุก $x \in [a, b]$ และเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันมีขอบเขต (bounded function) ถ้ามี $B > 0$ ที่ทุก $f(x) \leq B$ ทุก $x \in [a, b]$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้นำมาใช้โดยไม่พิสูจน์ สำหรับการพิสูจน์ดู [1] หรือ [2] หรือ ตำราแคลคูลัส หรือ ตำราคณิตวิเคราะห์ทั่วไป

ทฤษฎีบท 2.2 (ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง : Intermediate Value Theorem : IVT) ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและสมมติ $f(a) < f(b)$ สำหรับแต่ละจำนวนจริง k ที่ $f(a) < k < f(b)$ จะมี $c \in (a, b)$ ที่ $f(c) = k$

ทฤษฎีบท 2.3 (ทฤษฎีบทค่าสุดขีด : Extreme Value Theorem : EVT) ถ้า $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ และ f ต่อเนื่อง แล้วจะมี c และ d ใน $[a, b]$ ที่ $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ ทุก $x \in [a, b]$ หรือมีจำนวนจริง m, M ที่ $m \leq f(x) \leq M$ ทุก $x \in [a, b]$

ทฤษฎีบท 2.4 (ทฤษฎีบทของรอล : Rolle's Theorem) ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ หาอนุพันธ์ได้บน (a, b) ถ้า $f(a) = f(b) = 0$ แล้วจะมี $c \in (a, b)$ ที่ $f'(c) = 0$

เนื่องจากฟังก์ชันที่จะกล่าวถึงต่อไปเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ (Riemann integrable function) เพื่อจะนำไปสู่บทนิยามปริพันธ์รีมันน์ (Riemann integral) จึงสมควรที่จะทบทวนนิทศน์เกี่ยวกับผลบวกรีมันน์ (Riemann sum) โดยสังเขปดังนี้ : ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตบน $[a, b]$ ให้ P เป็นผลแบ่งกัน (partition) ความยาว N ของ $[a, b]$ นั่นคือ P ได้จากการเลือกจุดใดๆ ใน $[a, b]$ ที่แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น N ช่วงย่อย

$$\text{ผลแบ่งกัน } P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

$$\text{ช่วงย่อย} : [x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{N-1}, x_N]$$

ความยาวของช่วงที่ $i, i = 1, 2, \dots, N$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

ค่าสูงสุด (maximum) ของความยาว Δx_i เรียกว่านอร์ม (norm) ของผลแบ่งกัน P เขียนแทนด้วย $\|P\|$ และเรียกเซตของจุด $C = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ โดยที่ $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ว่า เซตของจุดระหว่างกลาง (set of intermediate point) ผลบวกรีมันน์ นิยามดังนี้

$$R(f, P, C) = \sum_{i=1}^N f(c_i) \Delta x_i$$

จากการปริพันธ์โดยสังเขปข้างต้นเราสามารถให้นิยามฟังก์ชันหาปริพันธ์รีมันน์ได้ และปริพันธ์รีมันน์ได้ดังนี้

บทนิยาม 2.5 ฟังก์ชัน $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ หาปริพันธ์รีมันน์ได้ (Riemann integrable) ถ้าทุกผลบวก รีมันน์ เข้าสู่ลิมิต L ค่าหนึ่งและค่าเดียว เมื่ออนุกรมของผลแบ่งกันเข้าสู่ศูนย์นั่นคือ

$$L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, C) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(c_i) \Delta x_i$$

หรืออีกนัยหนึ่ง ถ้า $|R(f, P, C) - L|$ มีค่าน้อยตามใจชอบเมื่ออนุกรม $\|P\|$ เข้าสู่ศูนย์ [ทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ถ้า $\|P\| - 0 < \delta$ แล้ว $|R(f, P, C) - L| < \varepsilon$] ไม่ว่าเราจะเลือกผลแบ่งกันและจุดระหว่างกลางเป็นอย่างไรก็ตาม

ลิมิต L ถ้ามีจริง (exist) จะเขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x) dx$ เรียกปริพันธ์นี้ว่า **ปริพันธ์จำกัดเขต**

(definite integral) หรือ **ปริพันธ์รีมันน์** (Riemann integral) ของฟังก์ชัน f บน $[a, b]$

ทฤษฎีบท 2.6 ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจะได้ f หาปริพันธ์รีมันน์ได้

ทฤษฎีบท 2.7 ถ้า $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ หาปริพันธ์รีมันน์ได้ให้ $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$ จะได้ $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 2.8 (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส : Fundamental Theorem of Calculus : FTC) ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง นิยาม

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

จะได้ F หาอนุพันธ์ได้ และ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$

ทฤษฎีบท 2.9 (สมบัติทางเดียว : Monotonicity) ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ ถ้า $f(x) \leq g(x)$ ทุก $x \in [a, b]$

$$\text{แล้ว } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

3. ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับปริพันธ์สองฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ต่อเนื่อง และ $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ หาปริพันธ์รีมันน์ได้ และไม่เป็นลบ (Riemann integrable and nonnegative) จะมี $c \in (a, b)$ ที่

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

การพิสูจน์ จาก f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดยทฤษฎีบทค่าสุดขีดจะมีจำนวนจริง m และ M ที่ $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ และเนื่องจาก $g(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ เราได้ $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ หาปริพันธ์ (integrating) จาก a ถึง b และโดยทฤษฎีบท 2.9 จะได้

$$\int_a^b mg(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b Mg(x) dx$$

จาก m และ M เป็นค่าคงตัวจะได้

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{ถ้า } \int_a^b g(x) dx = 0 \text{ จะได้ } 0 = m \cdot 0 \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \cdot 0 = 0$$

$$\text{นั่นคือ } \int_a^b f(x)g(x) dx = 0 \text{ ดังนั้นสำหรับทุก } c \in (a, b)$$

$$\text{จะได้ } \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{ถ้า } \int_a^b g(x) dx \neq 0 \text{ จะได้ } \int_a^b g(x) dx > 0 \text{ ดังนั้น}$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$$

โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลางจะมี $c \in (a, b)$ ที่

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

ซึ่งจะได้

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

,

บทแทรก 3.2 ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ต่อเนื่อง จะมี $c \in (a, b)$ ที่

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a) \quad (2)$$

การพิสูจน์ นิยาม $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ดังนี้

$$g(x) = 1, a \leq x \leq b$$

จะได้ g หาปริพันธ์มันนได้และไม่เป็นลบ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่ามี $c \in (a, b)$ ที่

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx = f(c)(b - a),$$

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ให้ $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ หาปริพันธ์มันนได้และไม่เป็นลบ จะได้ว่ามี $c \in (a, b)$ ที่

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^c g(x) dx + f(b) \int_c^b g(x) dx \quad (3)$$

การพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 3.1 จะมี $\alpha \in (a, b)$ ที่

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\alpha) \int_a^b g(x) dx \quad (i)$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เราได้

$$f(a) \leq f(\alpha) \leq f(b)$$

นิยาม $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ดังนี้

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \int_x^b g(t) dt$$

จาก g หาปริพันธ์มันนได้ จะได้ $F(x)$ นิยามแจ่มชัด (well-defined) และต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ (โดยทฤษฎีบท 2.7)
จาก $g(x) \geq 0$ และ $f(\alpha) - f(a) \geq 0$ จะได้

$$F(b) = 0 \leq [f(\alpha) - f(a)] \int_a^b g(x) dx \leq F(a)$$

โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง จะมี $c \in (a, b)$ ที่

$$F(c) = [f(\alpha) - f(a)] \int_a^b g(x) dx$$

ดังนั้น

$$f(b) \int_c^b g(x) dx - f(a) \int_c^b g(x) dx = f(\alpha) \int_c^b g(x) dx - f(a) \int_c^b g(x) dx$$

นั่นคือ

$$f(\alpha) \int_a^b g(x) dx = f(b) \int_c^b g(x) dx + f(a) \int_b^c g(x) dx + f(a) \int_a^b g(x) dx \quad (ii)$$

ซึ่งจะได้จาก (i) และ (ii)

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^c g(x) dx + f(b) \int_c^b g(x) dx \quad ,$$

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะมี $c \in (a, b)$ ที่

$$\int_a^c f(x)g(x) dx + \int_c^b f(x) dx = f(c)(c-a) - f(c)g(c)(c-b) \quad (4)$$

การพิสูจน์ ให้

$$F(x) = (x-b) \int_a^x f(t)g(t) dt + (x-a) \int_x^b f(t) dt$$

เนื่องจาก f และ g ต่อเนื่อง จะได้ fg ต่อเนื่องบน $[a, b]$ ดังนั้น fg หาปริพันธ์ได้ ให้

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)g(t) dt, \quad F_2(x) = \int_x^b f(t) dt$$

จะได้ $F_1(x)$ และ $F_2(x)$ ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น $(x-b) F_1(x)$ และ $(x-a) F_2(x)$ ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ ซึ่งจะได้ $F(x)$ ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[a, b]$ จากการนิยาม $F(x)$ จะได้ $F(a) = 0 = F(b)$ โดยทฤษฎีบทของโรล จะมี $c \in (a, b)$ ที่

$$F'(c) = 0$$

หาอนุพันธ์ฟังก์ชัน $F(x)$ ได้

$$F'(x) = \left[\int_a^x f(t)g(t) dt + (x-b)f(x)g(x) \right] + \left[\int_x^b f(t) dt + (x-a)(-f(x)) \right]$$

ดังนั้น

$$0 = F'(c) = \left[\int_a^c f(x)g(x) dx + (c-b)f(c)g(c) \right] + \left[\int_c^b f(x) dx - (c-a)f(c) \right]$$

นั่นคือ

$$\int_a^c f(x)g(x) dx + \int_c^b f(x) dx = f(c)(c-a) - f(c)g(c)(c-b) ,$$

ในทฤษฎีบท 3.4 ถ้าให้ $g(x) = 1$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = f(c)(c-a) - f(c)(c-b)$$

นั่นคือ จะได้ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับปริพันธ์ :

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \text{ ตามบทแทรก 3.2 หรือ ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับปริพันธ์}$$

4. บรรณานุกรม

- [1] สมใจ จิตพิทักษ์. (2550). คณิตวิเคราะห์ : ทฤษฎีและตัวอย่าง. สงขลา : มหาวิทยาลัยทักษิณ.
- [2] Kosmala, Witold A. J. (1995). Introductory Mathematical Analysis. Dubuque, IA. : Wm. C. Brown Publishers.
- [3] Tong, Jingcheng. (2002, March). "Mean value theorem for integrals generalized to involve two functions," The Mathematical Gazette. (90), 126-127.