

สมบัติการหารลงตัวบางประการของจำนวนฟีโบนัชชี
Some Divisibility Properties of Fibonacci Numbers

กัญญาณาด จิรวาสดี¹ และ สมใจ จิตพิทักษ์²

1. บทนำ

จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci numbers) นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้
 $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$ จะได้ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) คือ
1, 1, 2, 3, 5, 8, ... มีเอกลักษณ์และสมบัติเกี่ยวกับจำนวนฟีโบนัชชีมากมาย สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการหารลงตัวคือ
หาร F_m ลงตัว F_{nm} ซึ่งพิสูจน์ได้หลายวิธี วิธีหนึ่งโดยใช้ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก $F_m = \frac{2}{\sqrt{5}i^m} \sinh[m \log(i\phi)]$
ในบทความนี้จะใช้สมบัติการหารลงตัว $F_m | F_{nm}$ พิสูจน์สมบัติการหารลงตัวอื่นๆ เช่น $(F_m, F_n) = F_{(m, n)}, n | m$
ก็ต่อเมื่อ $F_n | F_m$, และ $2 | F_n$ ก็ต่อเมื่อ $3 | n$

2. พื้นฐานเบื้องต้น

สัญลักษณ์ $\mathbb{N}$ และ $\mathbb{Z}$ แทนเซตจำนวนนับและเซตจำนวนเต็มตามลำดับ นั่นคือ
 $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$ และ $\mathbb{Z} = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

บทนิยาม 2.1 ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม $b \neq 0$ เรากล่าวว่า b หาร a ลงตัว เขียน $b | a$ ถ้ามี $c \in \mathbb{Z}$
ที่ $a = bc$ ถ้า b หาร a ไม่ลงตัว เขียน $b \nmid a$.

ทฤษฎีบท 2.2 (ขั้นตอนวิธีการหาร) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b > 0$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม
 q และ r คู่หนึ่งและคู่เดียวเท่านั้นที่ $a = qb + r, 0 \leq r < b$

¹ นิสิตบัณฑิตศึกษา ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

² รองศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

บทนิยาม 2.3 ให้ $a \in \mathbb{Z}$ ถ้า $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ กล่าวว่า **a เป็นจำนวนคู่** (even number)

ถ้า $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ กล่าวว่า **a เป็นจำนวนคี่** (odd number)

บทนิยาม 2.4 จำนวนเต็ม a และ b เรียกว่า **มีภาวะเดียวกัน** (same parity) ถ้า a และ b เป็นจำนวนคู่ด้วยกันหรือคี่ด้วยกัน
กรณี a เป็นจำนวนคู่ b เป็นจำนวนคี่ หรือ a เป็นจำนวนคี่ b เป็นจำนวนคู่ กล่าวว่า a และ b **มีภาวะตรงข้าม** (opposite parity)

บทนิยาม 2.5 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน **ตัวหารร่วมมาก** (ห.ร.ม.)

(greatest common divisor) ของ a และ b เขียนแทนด้วย (a, b) คือ จำนวนเต็มบวก d ที่มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. $d \mid a$ และ $d \mid b$

2. ถ้า $c \mid a$ และ $c \mid b$ แล้ว $c \mid d$

บทนิยาม 2.6 จำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ซึ่งมีจำนวนเต็มบวกที่หารได้ลงตัวมีเพียงตัวมันเองกับ 1 เท่านั้น เรียกว่า
จำนวนเฉพาะ (prime number) จำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ เรียกว่า **จำนวนประกอบ** (composite)

บทนิยาม 2.7 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มซึ่งต่างไม่เท่ากับศูนย์ ถ้า $(a, b) = 1$ กล่าวว่า a และ b เป็น **จำนวนเฉพาะ
สัมพัทธ์** (relatively prime)

บทตั้ง 2.8 (บทตั้งยูคลิด : Euclid's lemma) ถ้า $a \mid bc$ และ $(a, b) = 1$ แล้ว $a \mid c$

การพิสูจน์ จาก $(a, b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x และ y ที่

$$1 = ax + by$$

คูณสมการนี้ด้วย c จะได้

$$c = 1c = acx + bcy$$

เนื่องจาก $a \mid ac$ และ $a \mid bc$ ดังนั้น $a \mid (acx + bcy)$ นั่นคือ $a \mid c$ □

จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci number) นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \quad \text{และ} \quad F_m = F_{m-1} + F_{m-2}, \quad m \geq 3$$

จากบทนิยามจะได้ลำดับฟีโบนัชชี คือ

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

จำนวนที่นิยามคล้ายกับจำนวนฟีโบนัชชี คือ จำนวนลูคัส (Lucas number) นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$L_1 = 1, L_2 = 3 \text{ และ } L_m = L_{m-1} + L_{m-2}, \quad m \geq 3$$

จากบทนิยามนี้จะได้ว่าลำดับลูคัส คือ

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \dots$$

จำนวนฟีโบนัชชีและจำนวนลูคัสที่สมนัย(อยู่ในตำแหน่งเดียวกันหรือพจน์ตรงกัน)กันมีภาวะเดียวกัน

สูตรบินต์ (Binet's formula) สำหรับ F_m และ L_m คือ

$$F_m = \frac{\phi^m - (-\phi)^{-m}}{\sqrt{5}} \text{ และ } L_m = \phi^m + (-\phi)^{-m}$$

$$\text{โดยที่ } \phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \text{ และ } (-\phi)^{-1} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

บทนิยาม 2.9 ให้ $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ นิยาม $\log(z)$ ดังนี้

$$\log(z) = \log(x + iy) = \log r + i(\theta + 2\pi k)$$

$$\text{โดยที่ } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

หมายเหตุ $\log z$ คือ $\log_e(z)$ หรือ $\ln(z)$

บทนิยาม 2.10 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์ (hyperbolic sine) และ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์ (hyperbolic cosine) สำหรับตัวแปรเชิงซ้อน x นิยามดังนี้

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ และ } \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

สมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์ที่จะนำไปใช้มีดังนี้

1. $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
2. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

บทตั้ง 2.11
$$F_m = \frac{2}{\sqrt{5}i^m} \sinh[m \log(i\phi)]$$

การพิสูจน์ จากบทนิยามฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ให้ $x = m \log(i\phi)$ โดยที่ $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $i^2 = -1$ จะได้

$$\sinh[m \log(i\phi)] = \frac{e^{m \log(i\phi)} - e^{-m \log(i\phi)}}{2} = \frac{i\phi^m - i\phi^{-m}}{2}$$

คูณตลอดด้วย $\frac{2}{\sqrt{5}i^m}$ จะได้

$$\frac{2}{\sqrt{5}i^m} \sinh[m \log(i\phi)] = \frac{\phi^m - i^{-2m}\phi^{-m}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^m - (-\phi)^{-m}}{\sqrt{5}}$$

ดังนั้นโดยสูตรบีเนตจะได้

$$F_m = \frac{2}{\sqrt{5}i^m} \sinh[m \log(i\phi)]$$

□

บทตั้ง 2.12 $L_m = \frac{2}{i^m} \cosh[m \log(i\phi)]$

การพิสูจน์ จากบทนิยามฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ให้ $x = m \log(i\phi)$ โดยที่ $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $i^2 = -1$ จะได้

$$\cosh m \log i\phi = \frac{e^{m \log i\phi} + e^{-m \log i\phi}}{2} = \frac{i\phi^m + i\phi^{-m}}{2}$$

คูณตลอดด้วย $\frac{2}{i^m}$ จะได้

$$\frac{2}{i^m} \cosh[m \log(i\phi)] = \phi^m + i^{-2m}\phi^{-m} = \phi^m + (-\phi)^{-m}$$

ดังนั้นโดยสูตรบีเนตจะได้

$$L_m = \frac{2}{i^m} \cosh[m \log(i\phi)]$$

□

3. ผลลัพธ์หลัก

3.1 การพิสูจน์ $F_m \mid F_{nm}$ โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

บทตั้ง 3.1 $F_m = F_{k+1}F_{m-k} + F_k F_{m-k-1}$, $m > k + 1 > 1$

การพิสูจน์ (Informal)

$$\begin{aligned} F_m &= F_{m-1} + F_{m-2} = F_2 F_{m-1} + F_1 F_{m-2} \\ &= 2F_{m-2} + 1F_{m-3} = F_3 F_{m-2} + F_2 F_{m-3} \\ &= 3F_{m-3} + 2F_{m-4} = F_4 F_{m-3} + F_3 F_{m-4} \\ &= 5F_{m-4} + 3F_{m-5} = F_5 F_{m-4} + F_4 F_{m-5} \\ &\vdots \\ &= F_{k+1} F_{m-k} + F_k F_{m-k-1} \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.2 $F_m \mid F_{nm}$ ทุก $m, n \geq 1$

การพิสูจน์ เราพิสูจน์โดยการอุปนัยบน n กรณี $n = 1$ เห็นชัดว่า $F_m \mid F_{nm}$

กรณี $n = 2$ จากบทตั้ง 3.1 เมื่อ $k = m$ จะได้

$$F_{2m} = F_{m+1}F_{2m-m} + F_m F_{2m-m-1} = F_m(F_{m+1} + F_{m-1})$$

ดังนั้น $F_m \mid F_{2m}$ สมมติ $F_m \mid F_{Nm}$, $N \geq 2$ นั่นคือ $F_{Nm} = rF_m$, $r \in \mathbb{Z}$

จะพิสูจน์ $F_m \mid F_{(N+1)m}$ จากบทตั้ง 3.1 เมื่อ $k = m$ จะได้

$$\begin{aligned} F_{(N+1)m} &= F_{m+1}F_{(N+1)m-m} + F_m F_{(N+1)m-m-1} \\ &= F_{m+1}F_{Nm} + F_m F_{Nm-1} \\ &= F_{m+1}(rF_m) + F_m F_{Nm-1} \\ &= F_m(rF_{m+1} + F_{Nm-1}) \end{aligned}$$

ซึ่งได้ $F_m \mid F_{(N+1)m}$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $F_m \mid F_{nm}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

□

3.2 การพิสูจน์ $F_m \mid F_{nm}$ โดยใช้ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

บทตั้ง 3.3 $2F_{m+n} = F_m L_n + L_m F_n$

การพิสูจน์ โดยใช้เอกลักษณ์

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$$

ดังนั้นจาก

$$F_m L_n = \frac{2}{\sqrt{5}i^m} \sinh[m \log(i\phi)] \frac{2}{i^n} \cosh[n \log(i\phi)]$$

และ

$$L_m F_n = \frac{2}{i^m} \cosh[m \log(i\phi)] \frac{2}{\sqrt{5}i^n} \sinh[n \log(i\phi)]$$

จะได้

$$\begin{aligned} F_m L_n + L_m F_n &= \frac{2}{\sqrt{5}i^m} \cdot \frac{2}{i^n} [\sinh(m \log(i\phi)) \cosh(n \log(i\phi)) + \cosh(m \log(i\phi)) \sinh(n \log(i\phi))] \\ &= 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}i^{m+n}} [\sinh(m \log(i\phi)) \cosh(n \log(i\phi)) + \cosh(m \log(i\phi)) \sinh(n \log(i\phi))] \\ &= 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}i^{m+n}} \sinh[m \log(i\phi) + n \log(i\phi)] \\ &= 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}i^{m+n}} \sinh[(m+n) \log(i\phi)] = 2F_{m+n} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$2F_{m+n} = F_m L_n + L_m F_n \quad \square$$

ทฤษฎีบท 3.4 $F_m \mid F_{nm}$ ทุก $m, n \geq 1$

การพิสูจน์ เราพิสูจน์โดยใช้อุปนัยบน n สำหรับ $n = 1$ จะได้

$$F_{nm} = F_{1m} = F_m$$

ดังนั้น $F_m \mid F_{nm}$ สมมติ $F_m \mid F_{Nm}$ นั่นคือ

$$F_{Nm} = kF_m, \quad k \in \mathbb{Z}$$

จะพิสูจน์ว่า $F_m \mid F_{N+1 m}$ จากบทตั้ง 3.3 จะได้

$$2F_{N+1 m} = F_{Nm} L_m + L_{Nm} F_m$$

หารตลอดด้วย F_m จะได้

$$\frac{2F_{N+1 m}}{F_m} = \frac{F_{Nm}}{F_m} L_m + L_{Nm} = kL_m + L_{Nm}$$

ถ้า F_m เป็นจำนวนคี่ จาก $F_m \mid F_{N+1 m}$ และ $(F_m, 2) = 1$ โดยบทตั้งยุคคิด

จะได้ $F_m \mid F_{N+1 m}$ ถ้า F_m เป็นจำนวนคู่เนื่องจาก F_m และ L_m มีภาวะเดียวกัน

จะได้ L_m เป็นจำนวนคู่และ L_{Nm} มีภาวะเดียวกับ F_{Nm} ซึ่ง $F_{Nm} = kF_m = 2k'$, $k' \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น L_{Nm} เป็นจำนวนคู่ จะได้

$$\frac{F_{N+1m}}{F_m} = \frac{kL_m + L_{Nm}}{2} = k'', \quad k'' \in \mathbb{Z}$$

เพราะฉะนั้น $F_m \mid F_{N+1m}$ โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $F_m \mid F_{nm}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ □

3.3 ผลสืบเนื่อง

บทตั้ง 3.5 สำหรับ $m \geq 1, n \geq 1$

$$F_{n+m+1} = F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1}$$

การพิสูจน์ ตรึง m และใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน n สำหรับ จะได้

$$\begin{aligned} F_1 F_m + F_2 F_{m+1} &= 1 \cdot F_m + 1 \cdot F_{m+1} \\ &= F_m + F_{m+1} = F_{m+2} = F_{1+m+1} \end{aligned}$$

ข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง สำหรับ $n = 1$ สมมติข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots, k, \quad k \geq 2$ นั่นคือ

$$F_{k-1+m+1} = F_{k-1} F_m + F_k F_{m+1}$$

และ

$$F_{k+m+1} = F_k F_m + F_{k+1} F_{m+1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} F_{k+1+m+1} &= F_{k-1+m+1} + F_{k+m+1} \\ &= F_{k-1} F_m + F_k F_{m+1} + F_k F_m + F_{k+1} F_{m+1} \\ &= F_{k-1} + F_k F_m + F_k + F_{k+1} F_{m+1} \\ &= F_{k+1} F_m + F_{k+2} F_{m+1} \end{aligned}$$

ข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริงเมื่อ $n = k+1$ โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
จะได้ข้อความเป็นจริง ทุก $n \in \mathbb{N}$ □

บทตั้ง 3.6 $(F_n, F_{n+1}) = 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

การพิสูจน์ กรณี $n = 1$ จะได้

$$(F_1, F_2) = (1, 1) = 1$$

ข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง สมมติข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง เมื่อ $n = k$

นั่นคือ $(F_k, F_{k+1}) = 1$ พิจารณา เมื่อ $n = k+1$ จากสมบัติการอุปนัยและจาก

$(a, a + b) = (a, b)$ ทุก $a, b \in \mathbb{Z}$ จะได้

$$(F_{k+1}, F_{k+2}) = (F_{k+1}, F_k + F_{k+1}) = (F_{k+1}, F_k) = 1$$

ดังนั้นข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง เมื่อ $n = k+1$ โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้

ข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริงทุกจำนวนเต็มบวก n □

ทฤษฎีบท 3.7 สำหรับ $n > m > 2$ $F_m \mid F_n$ ก็ต่อเมื่อ $m \mid n$

การพิสูจน์ ถ้า $m \mid n$ จะได้ $n = qm$ สำหรับบาง $q \in \mathbb{N}$ โดยทฤษฎีบท 3.2 $F_m \mid F_{qm}$

ดังนั้น $F_m \mid F_n$

ในทางกลับกัน สมมติ $F_m \mid F_n$ จะพิสูจน์ว่า $m \mid n$ จากสมมติฐาน

$n > m > 2$ และขั้นตอนวิธีการหาร จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q และ r ที่

$$n = qm + r, \quad 0 \leq r < m$$

สมมติ $r > 0$ จากบทตั้ง 3.5 จะได้

$$F_n = F_{qm+r} = F_{qm-1+r+1} = F_{qm-1}F_r + F_{qm}F_{r+1}$$

จาก $F_m \mid F_n$ (สมมติฐาน) และ $F_m \mid F_{qm}$ (ทฤษฎีบท 3.2) จะได้ $F_m \mid F_{qm-1}F_r$

และ $F_m \mid F_{qm}F_r$ ดังนั้น $F_m \mid (F_{qm-1}F_r, F_{qm}F_r)$ นั่นคือ $F_m \mid F_r(F_{qm-1}, F_{qm})$

แต่จากบทตั้ง 3.6 $(F_{qm-1}, F_{qm}) = 1$ ดังนั้น $F_m \mid F_r$ ซึ่งได้ข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $r = 0$ นั่นคือ $m \mid n$ □

บทแทรก 3.8 ถ้า F_q เป็นจำนวนเฉพาะ $q \geq 6$ แล้ว q เป็นจำนวนเฉพาะ

การพิสูจน์ เนื่องจาก $F_4 = 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ สมมติ q เป็นจำนวนประกอบ ที่ $q \geq 6$ จะได้

$$q = ab, \quad 2 < a < q, \quad 2 < b < q$$

ดังนั้น $F_a \mid F_q$ และ $F_b \mid F_q$ โดยที่ $F_a > 1$ และ $F_b > 1$ ดังนั้น F_q เป็นจำนวนประกอบ □

ทฤษฎีบท 3.9 $2 \mid F_n$ ก็ต่อเมื่อ $3 \mid n$

การพิสูจน์ ให้ $2 \mid F_n$ เนื่องจาก $2 = F_3$ ดังนั้น $F_3 \mid F_n$ ทุก n ที่ $n \geq 3$ โดย ทฤษฎีบท 3.7
ได้ $3 \mid n$

ในทางกลับกัน ให้ $3 \mid n$ จากทฤษฎีบท 3.7 ได้ $F_3 \mid F_n$ แต่ $F_3 = 2$ ดังนั้น $2 \mid F_n$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.10 $(F_m, F_n) = F_{(m, n)}$

การพิสูจน์ ให้ $(m, n) = d$ ดังนั้น $d \mid m$ และ $d \mid n$ โดยทฤษฎีบท 3.7 จะได้

$F_d \mid F_m$ และ $F_d \mid F_n$ ซึ่งจะได้ $F_d \mid (F_m, F_n)$

ให้ $F_c \mid F_m$ และ $F_c \mid F_n$ โดยทฤษฎีบท 3.7 จะได้ $c \mid m$ และ $c \mid n$ ดังนั้น $c \mid (m, n)$

นั่นคือ $c \mid d$ เพราะฉะนั้น $F_c \mid F_d$ นั่นคือ $F_d = (F_m, F_n)$ ซึ่งจะได้ $(F_m, F_n) = F_{(m, n)}$ $\square$

4. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์มหาวิทยาลัยทักษิณ ที่ให้ข้อเสนอแนะทั้งเชิงแก้ไขในการสัมมนา
คณิตศาสตร์และภาควิชาคณิตศาสตร์ที่เอื้อเพื่ออุปการณ์ในการเตรียมบทความ

ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิ ที่บรรณาธิการเชิญเป็นผู้กลั่นกรองและประเมินบทความและให้ คำแนะนำที่เป็น
ประโยชน์

5. บรรณานุกรม

- [1] สมใจ จิตพิทักษ์. (2547). **ทฤษฎีจำนวน** (พิมพ์ครั้งที่ 3). สงขลา : การกิจเอกสารและตำรา มหาวิทยาลัยทักษิณ.
- [2] LeVeque, W. J.(1996). **Fundamentals of Number Theory**. New York: Dover.
- [3] Osler, T. J. and Hilburn, A. (2007, November). "An unusual proof that F_m divides F_{nm} using hyperbolic functions," **The Mathematical Gazette**. (91), 510-512.
- [4] Wells, C. T. (2005). **Prime Numbers: The Most Mysterious Figures in Math**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.