

สูตรแบบเฮรอนสำหรับรูปสามเหลี่ยม
Heron-type Formula for Triangleสมใจ จิตพิทักษ์¹ และ เสกสรรค์ คำกระบี่²

1. บทนำ สำหรับรูปสามเหลี่ยม ABC ในระนาบ เรามีสูตรพื้นฐานในการคำนวณพื้นที่ (Δ) คือ

$$\Delta = \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC} = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \quad (1)$$

โดยที่ “ฐาน” คือ ความยาวฐาน และ “สูง” คือ ความยาวส่วนสูง ถ้า a , b และ c เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC แล้ว เฮรอนแห่งอเล็กซานเดรีย (Heron (หรือ Hero) of Alexandria ค.ศ. 10 – 70) ได้พบสูตรในการหาพื้นที่ ซึ่งรู้จักในชื่อ สูตรของเฮรอน (Heron's formula) คือ

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (2)$$

เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$ ซึ่งพิสูจน์ได้หลายวิธี

ถ้า m_a , m_b และ m_c เป็นความยาวของเส้นมัธยฐาน (median) ของรูปสามเหลี่ยม นั่นคือ ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอด A, B และ C ไปยังจุดกึ่งกลางของด้าน $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, และ $\overline{AB}$ แล้ว จะได้สูตรแบบเฮรอน (Heron-type formula) สำหรับพื้นที่รูปสามเหลี่ยม คือ

$$\Delta = \frac{3}{4} \sqrt{m_s(m_s-m_a)(m_s-m_b)(m_s-m_c)} \quad (3)$$

เมื่อ $m_s = \frac{m_a+m_b+m_c}{2}$

ถ้า h_a , h_b และ h_c เป็นความยาวของส่วนสูง (height) ของรูปสามเหลี่ยม นั่นคือ ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอด A, B และ C ไปตั้งฉากกับ $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, และ $\overline{AB}$ แล้ว จะได้สูตรส่วนกลับของพื้นที่ (reciprocal area formula) (Δ^{-1}) แบบเฮรอน คือ

¹ รองศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

² ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

$$\Delta^{-1} = 4\sqrt{h_s(h_s - h_a^{-1})(h_s - h_b^{-1})(h_s - h_c^{-1})} \quad (4)$$

โดยที่ $h_s = \frac{h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}}{2}$

การพิสูจน์ (3) และ (4) จะนำเสนอในตอนที่สามและตอนที่สี่ตามลำดับ

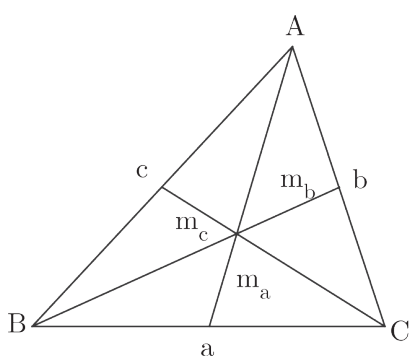
สูตรการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมเมื่อทราบความยาวของเส้นแบ่งครึ่งมุมสูตรหนึ่ง คือ

$$\Delta = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)l_A l_B l_C}{4abc(a+b+c)} \quad (5)$$

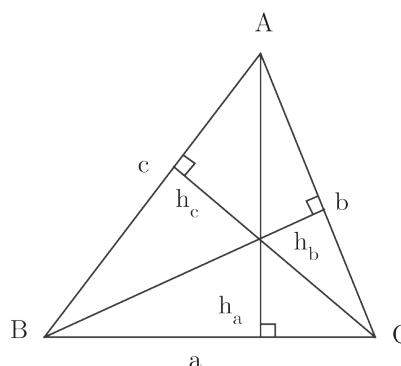
เมื่อ l_A , l_B และ l_C คือ ความยาวของเส้นแบ่งครึ่งมุม A, B และ C จากจุด A, B และ C ไปยังด้าน $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, และ $\overline{AB}$ การพิสูจน์ ดู [3]

2. พื้นฐานเบื้องต้น พื้นฐานความรู้สำหรับผู้อ่าน คือ เรขาคณิตยูคลิด (Euclid's Elements) ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และสูตรของเฮรอน

ในการศึกษาและการพิสูจน์ต่อไป เพื่อหลีกเลี่ยงที่จะต้องกล่าวซ้ำซาก เราให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี ความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c ให้ m_a , m_b และ m_c และ เป็นความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลาก จากจุด A, B และ C ไปยังจุดกึ่งกลางด้าน $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, และ $\overline{AB}$ (รูป 1(ก)) ให้ h_a , h_b และ h_c เป็นความยาวของ ส่วนสูงที่ลากจากจุด A, B และ C ไปตั้งฉากกับด้าน $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, และ $\overline{AB}$ (รูป 1(ข))



รูป 1 (ก)



รูป 1 (ข)

ให้ XY แทนความยาว (length) ส่วนของเส้นตรง (segment) $\overline{XY}$

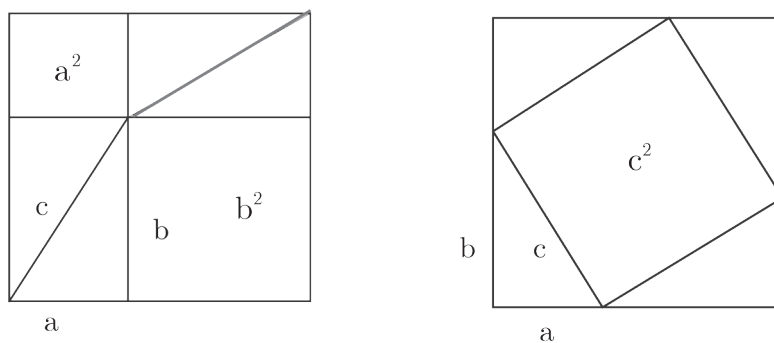
ทฤษฎีบท 2.1 (ทฤษฎีบทพีทาโกรัส: Pythagoras' theorem) ผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน ประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก นั่นคือ

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (2.1)$$

เมื่อ a และ b คือความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และ c คือความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

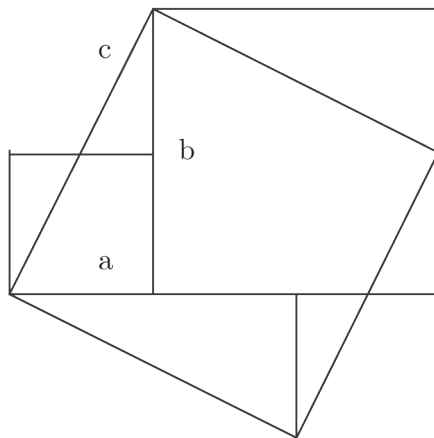
การพิสูจน์ (โดยรูป)

(i)



รูป 2 (ก) $a^2 + b^2 = c^2$

(ii)



รูป 2 (ข) $c^2 = a^2 + b^2$

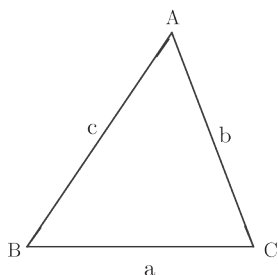
ทฤษฎีบท 2.2 (สูตรของเฮรอน: Heron's formula) รูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็น a , b และ c จะมีพื้นที่

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (2)$$

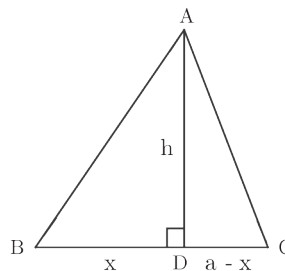
เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$

การพิสูจน์ (โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆในระนาบ ที่มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C มีความยาวเป็น a, b และ c สมมติ $b + c > a$ จะได้รูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป 3 (ก)



รูป 3 (ก)



รูป 3 (ข)

จากมุม A ลากเส้นตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่ D ให้ $\overline{AD}$ ยาว h หน่วย และ $\overline{BD}$ ยาว x หน่วย ดังนั้น $\overline{CD}$ ยาว $a - x$ หน่วย ดังรูป 3(ข)

พิจารณารูป 3(ข) รูปสามเหลี่ยม ABD มีมุมฉากที่ D โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้

$$c^2 = h^2 + x^2 \quad (2.2)$$

รูปสามเหลี่ยม ACD มีมุมฉากที่ D โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$b^2 = h^2 + (a - x)^2 \quad (2.3)$$

จาก (2.2) และ (2.3) ได้

$$c^2 - x^2 = h^2 = b^2 - (a - x)^2 \quad (2.4)$$

จาก (2.4) จะได้

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2ax$$

หรือ

$$x = \frac{c^2 - (b^2 - a^2)}{2a} \quad (2.5)$$

แทน (2.5) ใน (2.2) จะได้

$$\begin{aligned} h^2 &= c^2 - x^2 = (c - x)(c + x) \\ &= \left(\frac{2ac - c^2 + b^2 - a^2}{2a} \right) \left(\frac{2ac + c^2 - b^2 + a^2}{2a} \right) \\ &= \frac{(b^2 - (a - c)^2)((a + c)^2 - b^2)}{(2a)^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

แต่

$$\begin{aligned} b^2 - (a-c)^2 &= (b-(a-c))(b+(a-c)) \\ &= (b+c-a)(a+b-c) = (2s-2a)(2s-2c) \end{aligned} \quad (2.7)$$

และ

$$(a+c)^2 - b^2 = (a+c-b)(a+c+b) = (2s-2b)(2s) \quad (2.8)$$

เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$ แทน (2.7) และ (2.8) ใน (2.6) จะได้

$$h^2 = \frac{4^2 s(s-a)(s-b)(s-c)}{4a^2}$$

ดังนั้น

$$h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

จากสูตรพื้นฐานของการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$ จะได้

$$\Delta = \frac{1}{2} \times a \times \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

นั่นคือจะได้

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \square$$

3. สูตรแบบเฮรอนในรูปของความยาวของเส้นมัธยฐาน ในตอนนี้เราจะพิสูจน์ (3) นั่นคือสูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเมื่อทราบความยาวของเส้นมัธยฐาน แนวคิดหลักในส่วนนี้ได้จาก [1]

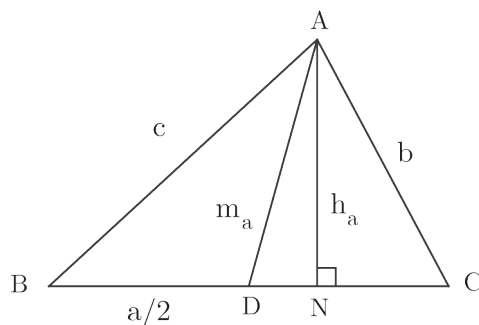
บทตั้ง 3.1 ให้ m_a , m_b และ m_c เป็นความยาวของเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b, และ c ตามลำดับ จะได้

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}, \quad m_b = \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}}$$

และ

$$m_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

การพิสูจน์ พิสูจน์รูป 4 ให้ $DN = d$, $h_a = AN$



รูป 4

จาก $BN = BD + DN = \frac{a}{2} + d$ จะได้

$$\begin{aligned} c^2 &= (BN)^2 + (AN)^2 = \left(\frac{a}{2} + d\right)^2 + h_a^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + ad + d^2 + h_a^2 = \frac{a^2}{4} + ad + m_a^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

และจาก $NC = DC - DN = \frac{a}{2} - d$ จะได้

$$\begin{aligned} b^2 &= (NC)^2 + (AN)^2 = \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + h_a^2 \\ &= \frac{a^2}{4} - ad + d^2 + h_a^2 = \frac{a^2}{4} - ad + m_a^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

บวก (3.1) และ (3.2) เข้าด้วยกันจะได้ $b^2 + c^2 = 2\left(\frac{a^2}{4}\right) + 2m_a^2$ ดังนั้น

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \quad (3.3)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$m_b = \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}} \quad (3.4)$$

และ

$$m_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}} \quad (3.5)$$

□

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ m_a, m_b และ m_c เป็นความยาวของเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b , และ c ตามลำดับ จะได้

$$\Delta = \frac{4}{3} \sqrt{m_s(m_s - m_a)(m_s - m_b)(m_s - m_c)} \quad (3)$$

เมื่อ $m_s = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$

การพิสูจน์ จากการนิยาม m_s จะได้

$$m_s - m_a = \frac{1}{2}(m_b + m_c - m_a)$$

$$m_s - m_b = \frac{1}{2}(m_c + m_a - m_b)$$

และ

$$m_s - m_c = \frac{1}{2}(m_a + m_b - m_c)$$

พิจารณา

$$K = 16m_s(m_s - m_a)(m_s - m_b)(m_s - m_c) \quad (3.6)$$

จะได้

$$\begin{aligned} K &= (m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)(m_a + m_b - m_c) \\ &= [(m_a + m_b)^2 - m_c^2][m_c^2 - (m_a - m_b)^2] \\ &= 2m_a^2m_b^2 + 2m_b^2m_c^2 + 2m_c^2m_a^2 - m_a^4 - m_b^4 - m_c^4 \\ &= 4m_a^2m_b^2 - (m_a^2 + m_b^2 - m_c^2)^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

แทน m_a, m_b และ m_c จาก (3.3), (3.4) และ (3.5) ได้

$$\begin{aligned} 4m_a^2m_b^2 &= 4\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\left(\frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2c^2 + 2a^2 - b^2) \\ &= \frac{1}{4}(-2a^4 - 2b^4 + 4c^4 + 5a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

และ

$$\begin{aligned} m_a^2 + m_b^2 - m_c^2 &= \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) + \left(\frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right) - \left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4}(-a^2 - b^2 + 5c^2) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} (m_a^2 + m_b^2 - m_c^2)^2 &= \frac{1}{16}(-a^2 - b^2 + 5c^2)^2 \\ &= \frac{1}{16}(a^4 + b^4 + 25c^4 + 2a^2b^2 - 10b^2c^2 - 10c^2a^2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

แทน (3.8) และ (3.9) ใน (3.7) ได้

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{16}(-9a^4 - 9b^4 - 9c^4 + 18a^2b^2 + 18b^2c^2 + 18c^2a^2) \\ &= \frac{9}{16}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2) \\ &= \frac{9}{16}[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] \\ &= 9 \left[\left(\frac{a+b+c}{2} \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - a \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - b \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - c \right) \right] \\ &= 9s(s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$ ดังนั้น

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{3}\sqrt{K}$$

เพราะฉะนั้นแทนค่า K จาก (3.6) ได้

$$\Delta = \frac{4}{3}\sqrt{m_s(m_s - m_a)(m_s - m_b)(m_s - m_c)} \quad \square$$

4. สูตรแบบเฮรอนสำหรับส่วนกลับของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ในตอนที่สี่เราพิสูจน์ (4) นั่นคือสูตรแบบเฮรอน สำหรับส่วนกลับของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม (Δ^{-1}) แนวคิดหลักในส่วนนี้ได้จาก [2]

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ h_a, h_b และ h_c เป็นความยาวของส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b, และ c ตามลำดับ จะได้

$$\Delta^{-1} = 4\sqrt{h_s(h_s - h_a^{-1})(h_s - h_b^{-1})(h_s - h_c^{-1})} \quad (4)$$

เมื่อ $h_s = \frac{h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}}{2}$

การพิสูจน์ จากสูตรพื้นฐานของการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม นั่นคือ

$$\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \quad (1)$$

จะได้

$$\Delta = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$$

ดังนั้น

$$a = 2\Delta h_a^{-1}, \quad b = 2\Delta h_b^{-1}, \quad c = 2\Delta h_c^{-1}$$

ให้ $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ จะได้

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}(2\Delta h_a^{-1} + 2\Delta h_b^{-1} + 2\Delta h_c^{-1}) \\ &= \Delta(h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}) = 2\Delta h_s \end{aligned}$$

เมื่อ $h_s = \frac{h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}}{2}$ ดังนั้น

$$s - a = 2\Delta h_s + 2\Delta h_a^{-1} = 2\Delta(h_s - h_a^{-1}), \quad s - b = 2\Delta(h_s - h_b^{-1}), \quad s - c = 2\Delta(h_s - h_c^{-1})$$

โดยสูตรของเฮรอน จะได้

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{(2\Delta h_s)(2\Delta)(h_s - h_a^{-1})(h_s - h_b^{-1})(h_s - h_c^{-1})} \\ &= 4\Delta^2 \sqrt{h_s(h_s - h_a^{-1})(h_s - h_b^{-1})(h_s - h_c^{-1})} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\Delta^{-1} = \frac{\Delta}{\Delta^2} = 4\sqrt{h_s(h_s - h_a^{-1})(h_s - h_b^{-1})(h_s - h_c^{-1})} \quad \square$$

5. คำขอบคุณ ขอขอบคุณ คุณวิสิทธิ์กร ชฎารัตน์ คุณอัจฉรา วิไลรักษ์ และคุณรัตติกานต์ เหล่าทองคำ ที่เป็นต้นเรื่องหาบทความมานำเสนอในการสัมมนาคณิตศาสตร์ อันเป็นที่มาของบทความนี้ และพิเศษสำหรับคุณอัจฉรา วิไลรักษ์ ที่ช่วยพิมพ์ต้นฉบับบทความให้ด้วยความรวดเร็ว เรียบร้อย และสวยงาม

6. บรรณานุกรม

- [1] Benyi, A. [2003]. "A Heron – type formula for the triangle," **The Mathematical Gazette**. 87: 324 – 326
- [2] Mitchell, D.W.[2005] "A Heron – type formula for the reciprocal area of a triangle," **The Mathematical Gazette**. 89:494.
- [3] Simons, Stuart. [2009]. "Some results concerning angle bisectors," **The Mathematical Gazette**. 93: 115 – 116.