

# อินทิกรัลตามเส้นทางของอนุภาคไฟฟ้า ภายใต้แรงฮาร์มอนิกและสนามแม่เหล็กคงที่

## Path Integrals of the Harmonically Bound Charges in the Presence of Constant Magnetic Fields

**Key word** : path integrals, harmonically bound charges, magnetic fields.

รองศาสตราจารย์ ดร.นิคม ชูศิริ\* วท.ด.(ฟิสิกส์)  
ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

Associate Professor Dr. Nikom Choosiri Ph.D.(physics)  
Physics Department, Faculty of Science, Thaksin University

### Abstract

The propagator for a harmonically bound charge particle(electron) in a constant magnetic fields is evaluated exactly using path-integral method, we find that the propagator can be written in an analytical form

$$\begin{aligned} K(b,a;T) = & \left( \frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega T)} \right)^{1/2} \left( \frac{m\Omega'}{2\pi i \hbar \sin(\Omega' T)} \right) \\ & \times \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \left\{ \frac{\omega}{\sin(\omega T)} \left( (z_b^2 + z_a^2) \cos(\omega T) - 2z_a z_b \right) \right. \right. \\ & + \frac{\Omega' \cos(\Omega' T)}{\sin(\Omega' T)} (x_b^2 + x_a^2 + y_b^2 + y_a^2) \\ & \left. \left. - \frac{2\Omega'}{\sin(\Omega' T)} \left( \cos \frac{\Omega' T}{2} (x_a y_b - x_b y_a) - \sin \frac{\Omega' T}{2} (x_a x_b + y_a y_b) \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

From the corresponding propagator, the density of states and the energy levels of the particle are obtained. We find that our results of energy levels agree well with the Zeeman effect.

### บทคัดย่อ

ได้คำนวณตัวแผ่กระจายของอนุภาคไฟฟ้า(อิเล็กตรอน)ภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็กคงที่และแรงฮาร์มอนิก การคำนวณใช้วิธีอินทิเกรตตามเส้นทาง พบว่าตัวแผ่กระจายเขียนอยู่ในรูปแบบเชิงวิเคราะห์ดังนี้

$$K(b,a;T) = \left( \frac{m\omega}{2\pi\hbar \sin(\omega T)} \right)^{1/2} \left( \frac{m\Omega'}{2\pi\hbar \sin(\Omega' T)} \right) \\ \times \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \left\{ \frac{\omega}{\sin(\omega T)} ((z_b^2 + z_a^2) \cos(\omega T) - 2z_a z_b) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\Omega' \cos(\Omega' T)}{\sin(\Omega' T)} (x_b^2 + x_a^2 + y_b^2 + y_a^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\Omega'}{\sin(\Omega' T)} \left( \cos \frac{\Omega' T}{2} (x_a y_b - x_b y_a) - \sin \frac{\Omega' T}{2} (x_a x_b + y_a y_b) \right) \right\} \right]$$

จากตัวแผ่กระจายที่ได้สามารถนำมาคำนวณหาความหนาแน่นสถานะและระดับพลังงานของอนุภาคได้ พบว่าระดับพลังงานที่ได้สอดคล้องเป็นอย่างดีกับการเกิดปรากฏการณ์ซีแมน

### บทนำ

#### ความสำคัญ ที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

ปัญหาของอนุภาคซึ่งถูกจำกัดขอบเขตด้วยแรงฮาร์มอนิก(แรงยึดหยุ่นคล้ายแรงดึงกลับของสปริง) เป็นปัญหาที่ทราบกันดีในวิชากลศาสตร์ควอนตัม เราเรียกอนุภาสดังกล่าวว่าฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์หรือตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก เราสามารถใช้กลศาสตร์เชิงคลื่นของชเรอดิงเงอร์คำนวณปริมาณทางกายภาพของอนุภาสดังกล่าวได้ อาทิ ฟังก์ชันคลื่นระดับพลังงานที่เป็นไปได้ และโอกาสที่จะพบอนุภาค ณ ตำแหน่งต่างๆ เป็นต้น ในทำนองเดียวกันปัญหาของอนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าซึ่งอยู่ภายใต้สนามแม่เหล็กแต่เพียงอย่างเดียว เราสามารถใช้กลศาสตร์เชิงคลื่นคำนวณปริมาณทางกายภาพของระบบได้โดยไม่ยากนัก อย่างไรก็ตามหากตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก เป็นอนุภาคไฟฟ้าซึ่งยังอยู่ภายใต้สนามแม่เหล็กอีก กลับกลายเป็นปัญหาที่ซับซ้อนยากต่อการใช้กลศาสตร์เชิงคลื่นคำนวณปริมาณทางกายภาพออกมาได้โดยง่าย ทั้งนี้เนื่องจากกลศาสตร์เชิงคลื่นของชเรอดิงเงอร์ซึ่งถือกำเนิดขึ้นในปี 1925 นั้นใช้วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชันคลื่นที่มีตัวแปรเป็นโคออร์ดิเนต ของตำแหน่ง(x,y,z) เราเรียกสมการนี้ว่า สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นต่อเวลา คำตอบหรือผลเฉลยของสมการดังกล่าวก็คือฟังก์ชันคลื่นนั่นเอง อาจกล่าวได้ว่าฟังก์ชันคลื่นเป็นหัวใจของกลศาสตร์ควอนตัม เนื่องจากฟังก์ชันคลื่นได้บรรจุความรู้ ความเข้าใจ เกี่ยวกับระบบไว้เกือบครบถ้วน เช่น ระดับพลังงานที่เป็นไปได้ และโอกาสที่จะพบอนุภาค ณ ตำแหน่งต่างๆ เป็นต้น ดังนั้นการเข้าถึงองค์ความรู้ของระบบอนุภาค จึงขึ้นกับการแก้สมการชเรอดิงเงอร์ แต่ความยากง่ายในการแก้สมการนั้นขึ้นอยู่กับรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ของพลังงานศักย์ของระบบ ยิ่งพลังงานศักย์ของระบบซับซ้อนเท่าใด ความยากในการแก้สมการเพื่อหาฟังก์ชันคลื่นย่อมมีมากขึ้นเท่านั้น สำหรับฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคไฟฟ้าภายใต้แรงฮาร์มอนิกและสนามแม่เหล็กสมำเสมอ นั้นยังไม่ปรากฏว่าสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีการกลศาสตร์เชิงคลื่น(ยังไม่ปรากฏในตำราเล่มใด) ถ้าหากคำนวณได้ก็คงซับซ้อนเป็นอย่างมาก

ในปี ค.ศ.1948 ฟายน์แมนได้เสนอกลศาสตร์ควอนตัมแนวใหม่(ถือเป็นพัฒนาการของวิชากลศาสตร์ควอนตัมในระดับหนึ่ง) คือได้เสนอทฤษฎีอินทิเกรตตามเส้นทาง วิธีการของฟายน์แมนสามารถเข้าถึงองค์ความรู้ของระบบอนุภาคด้วยวิธีที่แตกต่างจากวิธีของชเรอดิงเงอร์ โดยสิ้นเชิง กล่าวคือฟายน์แมนคำนวณหาตัวแผ่กระจายหรือฟังก์ชันกรีน (propagator or Green's function) ของอนุภาคแทนที่จะเป็นฟังก์ชันคลื่น โดยตัวแผ่กระจายนี้ได้รับรู้ความรู้เกี่ยวกับระบบไว้เกือบครบถ้วนเช่นกัน อาทิ มีรายละเอียดเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่น พลังงาน ตลอดจนโอกาสที่จะพบอนุภาค เป็นต้น ยิ่งไปกว่านั้นถ้าทราบตัวแผ่กระจายของระบบ เราอาจนำไปสู่ปริมาณทางกายภาพอื่นๆ ได้อีก เช่น ความนำไฟฟ้า ความนำความร้อน และความสามารถในการดูดกลืนแสง เป็นต้น

ความแตกต่างโดยสิ้นเชิงระหว่างวิธีการของชเรอดิงเงอร์และวิธีการของฟายน์แมนก็คือ วิธีการของชเรอดิงเงอร์นั้นใช้วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองคำนวณหาฟังก์ชันคลื่นออกมา ในขณะที่วิธีการของฟายน์แมนนั้นใช้วิธีการอินทิเกรตตามเส้นทางคำนวณหาตัวแผ่กระจายออกมา (ตัวแผ่กระจายบรรจุรายละเอียดเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่นไว้ครบถ้วน) วิธีการทั้งสองมีความยากง่ายแตกต่างกันขึ้นอยู่กับรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ของปัญหา ตัวอย่างเช่น ปัญหาของระบบที่อยู่ใต้แรงดึงดูดทางไฟฟ้า(เช่นอิเล็กตรอนในอะตอมไฮโดรเจน)สามารถคำนวณออกมาได้โดยง่ายด้วยวิธีของชเรอดิงเงอร์ แต่ในการคำนวณหาตัวแผ่กระจายของระบบดังกล่าวกลับกลายเป็นเรื่องยากจนแทบเป็นไปไม่ได้ แต่ทว่าในการหาฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคไฟฟ้าซึ่งอยู่ภายใต้แรงฮาร์มอนิกและสนามแม่เหล็กคงที่ด้วยวิธีการของชเรอดิงเงอร์นั้นกลับกลายเป็นเรื่องยาก แม้ว่าในกรณีที่อนุภาคซึ่งอยู่ภายใต้แรงฮาร์มอนิกแต่เพียงอย่างเดียว หรืออนุภาคไฟฟ้าซึ่งอยู่ภายใต้สนามแม่เหล็กแต่เพียงอย่างเดียวเราสามารถแก้สมการชเรอดิงเงอร์คำนวณหาฟังก์ชันคลื่นได้โดยไม่ต้องยากนักก็ตาม ดังนั้นผู้วิจัยจึงคิดว่าน่าจะใช้ทางเลือกใหม่ในการเข้าถึงองค์ความรู้ของปัญหาดังกล่าวโดยใช้วิธีอินทิเกรตตามเส้นทางคำนวณหาตัวแผ่กระจายออกมา หลังจากนั้นปริมาณทางกายภาพอื่นๆ เช่น พลังงานความหนาแน่นสถานะก็สามารถหาได้ไม่ยากนัก

### วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาทฤษฎีอินทิเกรตตามเส้นทางของฟายน์แมน
2. เพื่อคำนวณหาตัวแผ่กระจายของอนุภาคไฟฟ้าภายใต้แรงฮาร์มอนิกและสนามแม่เหล็ก
3. เพื่อคำนวณระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาค

### วิธีการคำนวณตัวแผ่กระจายและระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาคไฟฟ้า

#### ลากรางเจียนและตัวแผ่กระจาย

ลากรางเจียนของอนุภาคไฟฟ้า(อิเล็กตรอน) เคลื่อนที่ในสามมิติภายใต้สนามแม่เหล็กคงที่ตามแนวแกน z พร้อมกันนั้นยังอยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิกซึ่งมีความถี่เชิงมุม  $\omega$  คงที่เท่ากันหมดทุกแนวแกนเขียนได้ดังนี้

$$L(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z; t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \Omega(xy - y\dot{x}) - \omega^2(x^2 + y^2 + z^2) \quad \dots(1.1)$$

เมื่อ  $eB/mc$  และ  $m$  คือความถี่ไซโคลตรอน และมวลของอิเล็กตรอนตามลำดับ ตัวแผ่กระจายของอนุภาคสอดคล้องกับลากรางเจียนตามสมการ(1.1) เขียนอยู่ในรูปอินทิกรัลตามเส้นทางได้ดังนี้

$$K(b,a;T) = \int_a^b \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \Omega(xy - yx) - \omega^2(x^2 + y^2 + z^2))dt\right] \\ \times D[x(t)]D[y(t)]D[z(t)] \quad \dots(1.2)$$

อินทิกรัลตามเส้นทางตามสมการ(1.2) สามารถเขียนใหม่ได้เป็นผลคูณของตัวแผ่กระจายตามระนาบ xy และตามแนวแกน z กล่าวคือ

$$K(b,a;T) = K_{xy}(b,a;T)K_z(b,a;T) \quad \dots(1.3)$$

โดยที่

$$K_{xy}(b,a;T) = \int_a^b \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx) - \omega^2(x^2 + y^2))dt\right] D[x(t)]D[y(t)] \\ \dots(1.4)$$

และ

$$K_z(b,a;T) = \int_a^b \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \int_0^T (\dot{z}^2 - \omega^2 z^2)dt\right] D[z(t)] \quad \dots(1.5)$$

สำหรับตัวแผ่กระจาย  $K_z(b,a;T)$  ที่ปรากฏในสมการ(1.5)เป็นรูปแบบของตัวแผ่กระจายของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้นสามารถคำนวณได้ไม่ยากดังปรากฏตามเอกสารอ้างอิง(Feynman,1965) กล่าวคือเราได้

$$K_z(b,a;T) = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sin \omega T}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega T}((z_b^2 + z_a^2) \cos \omega T - 2z_a z_b)\right] \quad \dots(1.6)$$

ส่วนรูปแบบของ  $K_{xy}(b,a;T)$  ตามสมการ(1.4)เป็นรูปแบบของตัวแผ่กระจายของอนุภาคไฟฟ้าซึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ xy ภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิกและสนามแม่เหล็กซึ่งตั้งฉากกับระนาบ xy และเนื่องจากลากrange เกียนของอนุภาคสอดคล้องกับตัวแผ่กระจายตามสมการ(1.4)เป็นลากรางเกียนที่มีสมบัติquadratic (กำลังของ  $\dot{x}, \dot{y}$  และ  $x, y$  มีค่าไม่เกินสอง) จึงสามารถใช้สูตรของ van Vleck-Pauli ได้ (van Vleck,1978),(Pauli,1952) กล่าวคือเราได้

$$K_{xy}(b,a;T) = F(T)e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}[b,a;T]} \quad \dots(1.7)$$

เมื่อ  $S_{cl}[b,a;T]$  คือแอคชันแบบฉบับ ส่วน  $F(T)$  คือ prefactor สามารถหาได้โดยใช้สูตร

$$F(T) = \left[ \det \left( \frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2 S_{cl}[b,a;T]}{\partial \sigma_a \partial \sigma_b} \right) \right]^{1/2} \quad \dots(1.8)$$

### เส้นทางแบบฉบับของอนุภาคไฟฟ้าในระนาบ xy

ในการหาแอక్షันแบบฉบับเราจำเป็นต้องหาเส้นทางแบบฉบับให้ได้ก่อน โดยที่แอక్షันแบบฉบับและเส้นทางแบบฉบับสัมพันธ์กันดังนี้

$$S_c[b,a;T] = \int_0^T L(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}}, \bar{x}, \bar{y}; t) dt \quad \dots(1.9)$$

เมื่อ  $\bar{x}$  และ  $\bar{y}$  คือเส้นทางแบบฉบับเท่านั้น สำหรับการคำนวณเส้นทางแบบฉบับเราอาศัยเมทริกซ์ขนาด  $2 \times 2$  ซึ่งนำเสนอโดย G.J. Papadopoulos (Papadopoulos, 1971) กล่าวคืออาศัย

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots(1.10)$$

และโดยกำหนดให้

$$r_\perp = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tilde{r}_\perp = (x \ y) \quad \dots(1.11)$$

ทำให้สามารถเขียนลากรางเจียนในรูปที่กระชับรัดกว่าเดิมดังนี้

$$\begin{aligned} L(\dot{x}, \dot{y}, x, y; t) &= L(\dot{r}_\perp, r_\perp; t) \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}_\perp^2 - \Omega \tilde{r}_\perp J r_\perp - \omega^2 r_\perp^2) \end{aligned} \quad \dots(1.12)$$

เส้นทางแบบฉบับของอนุภาคย่อมสอดคล้องกับหลักแห่งการกระทำที่น้อยที่สุด(the principle of least action)หรือสอดคล้องกับสมการลากราง(สมการการเคลื่อนที่) กล่าวคือเป็นไปตามเงื่อนไข

$$\ddot{r}_\perp + \Omega J \dot{r}_\perp + \omega^2 r_\perp = 0 \quad \dots(1.13)$$

หรือ

$$(D^2 + \Omega J D + \omega^2) r_\perp = 0 \quad \dots(1.14)$$

เมื่อ  $D = d/dt$  หลังจากแก้สมการลากรางภายใต้เงื่อนไขขอบเขต

$$\left. \begin{aligned} r_{\perp}(0) &= r'_1 = \begin{pmatrix} x_a \\ y_b \end{pmatrix} \\ r_{\perp}(T) &= r''_1 = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \dots(1.15)$$

เราได้เส้นทางแบบฉบับดังนี้

$$r_{\perp}(t) = \frac{e^{-\Omega t/2}}{\sin \Omega' T} [e^{\Omega' T/2} \sin(\Omega' t) r''_1 + \sin \Omega'(T-t) r'_1] \quad \dots(1.16)$$

โดยที่  $\Omega' = \sqrt{(\Omega/2)^2 + \omega^2}$

แอคชันแบบฉบับของอนุภาคในระนาบ xy

พิจารณาสมการ(1.12) อีกครั้ง ลากรางเทียนของอนุภาคเคลื่อนที่ในระนาบxy ภายใต้แรงฮาร์มอนิกและสนามแม่เหล็กซึ่งมีทิศตั้งฉากกับระนาบคือ

$$L(\dot{r}_{\perp}, r_{\perp}; t) = \frac{m}{2} (\dot{r}_{\perp}^2 - \Omega \tilde{r}_{\perp} J r_{\perp} - \omega^2 r_{\perp}^2) \quad \dots(1.17)$$

สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคสอดคล้องกับลากรางเทียนดังกล่าวเขียนได้ดังนี้

$$\ddot{r}_{\perp} + \Omega J \dot{r}_{\perp} + \omega^2 r_{\perp} = 0 \quad \dots(1.18)$$

การหาแอคชันแบบฉบับของอนุภาคทำได้โดยการแทนเส้นทางแบบฉบับ  $r_{\perp}(t)$  ที่ได้จากสมการ(1.16) ลงในสมการ (1.9) หลังจากนั้นทำการอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร  $t$  ในช่วง(0,T) ทำให้เราได้

$$S_{cl}[b, a; T] = \frac{m}{2} \tilde{r}_{\perp} \dot{r}_{\perp} \Big|_0^T + \frac{m}{2} \left( \int_0^T \tilde{r}_{\perp} (\ddot{r}_{\perp} + \Omega J \dot{r}_{\perp} + \omega^2 r_{\perp}) dt \right) \quad \dots(1.19)$$

ส่วนในวงเล็บที่ปรากฏในอินทิกรัลของสมการ(1.19) มีค่าเป็นศูนย์เนื่องจากสอดคล้องสมการการเคลื่อนที่(1.18) ดังนั้นเราได้

$$S_{cl}[b, a; T] = \frac{m}{2} \tilde{r}_{\perp} \dot{r}_{\perp} \Big|_0^T = \frac{m}{2} (\tilde{r}_{\perp}'' \dot{r}_{\perp}(T) - \tilde{r}_{\perp}' \dot{r}_{\perp}(0)) \quad \dots(1.20)$$

การหา  $\dot{r}_\perp(T)$  และ  $\dot{r}_\perp(0)$  ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของเส้นทางแบบฉบับเทียบกับเวลา  $t$  หลังจากนั้นแทน  $t=0$  และ  $t=T$  ลงในเส้นทางแบบฉบับที่ได้ โดยวิธีนี้เราได้

$$S_{cl}[b,a;T] = \frac{m}{2} \left( \frac{\Omega' \cos(\Omega' T)}{\sin(\Omega' T)} (\tilde{r}_\perp' r_\perp'' + \tilde{r}_\perp' r_\perp') - \frac{2\Omega'}{\sin(\Omega' T)} \tilde{r}_\perp' e^{-\Omega' T/2} r_\perp' \right) \dots (1.21)$$

หรืออาจเขียนให้อยู่ในรูปที่คุ้นเคยกว่าโดยอาศัยความสัมพันธ์ของสมการ(1.10), (1.11) และคุณสมบัติ  $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$  ทำให้เราได้

$$S_{cl}[b,a;T] = \frac{m}{2} \left[ \frac{\Omega' \cos(\Omega' T)}{\sin(\Omega' T)} (x_b^2 + x_a^2 + y_b^2 + y_a^2) - \frac{2\Omega'}{\sin(\Omega' T)} \left( \cos \frac{\Omega' T}{2} (x_a y_b - x_b y_a) - \sin \frac{\Omega' T}{2} (x_a x_b + y_a y_b) \right) \right] \dots (1.22)$$

ตัวแผ่กระจายของอนุภาคในระนาบ xy  
จากสมการ(1.7 ) เรามี

$$K_{xy}(b,a;T) = F(T) e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}[b,a;T]} \dots (1.23)$$

เมื่อ  $F(T)$  คือ prefactor สามารถคำนวณโดยใช้สูตรของ van Vleck-Pauli กล่าวคือ

$$F(T) = \left[ \det \left( \frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2 S_{cl}[b,a;T]}{\partial \vec{r}_a \partial \vec{r}_b} \right) \right]^{1/2} \dots (1.24)$$

ทำให้เราได้  $F(T)$  ที่สอดคล้องกับแอกชันแบบฉบับตามสมการ(1.22) ดังนี้

$$F(T) = \left( \frac{m\Omega'}{2\pi\hbar \sin(\Omega' T)} \right) \dots (1.25)$$

จากสมการ(1.21)-(1.25) เราจะได้ว่าตัวแผ่กระจายของอนุภาคไฟฟ้าซึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ xy ภายใต้แรงฮาร์มอนิก และสนามแม่เหล็กคงที่ดังจากกับระนาบ xy คือ

$$K_{xy}(b,a;T) = \left( \frac{m\Omega'}{2\pi\hbar \sin \Omega' T} \right) \exp \frac{im}{2\hbar} \left( \frac{\Omega' \cos \Omega' T}{\sin \Omega' T} (\tilde{r}_\perp' r_\perp'' + \tilde{r}_\perp' r_\perp') - \frac{2\Omega'}{\sin \Omega' T} \tilde{r}_\perp' e^{-\Omega' T/2} r_\perp' \right) \dots (1.26)$$

### ตัวแผ่กระจายของอนุภาคไฟฟ้าซึ่งเคลื่อนที่ในสามมิติ

จากสมการ(1.3),(1.6) และสมการ(1.26) ในที่สุดเราได้ตัวแผ่กระจายของอนุภาคไฟฟ้า(อิเล็กตรอน)เคลื่อนที่ในสามมิติภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิกซึ่งมีความถี่เชิงมุม  $\omega$  คงที่ นอกจากนั้นยังอยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็กคงที่ในทิศทางตามแนวแกน  $z$  ดังนี้

$$K(b,a;T) = K_{xy}(b,a;T)K_z(b,a;T)$$

$$= \left( \frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T} \right)^{1/2} \left( \frac{m\Omega'}{2\pi i \hbar \sin \Omega' T} \right) \exp \left[ \frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega T} ((z_b^2 + z_a^2) \cos \omega T - 2z_a z_b) \right]$$

$$\times \exp \frac{im}{2\hbar} \left( \frac{\Omega' \cos \Omega' T}{\sin \Omega' T} (\tilde{r}_\perp' r_\perp'' + \tilde{r}_\perp' r_\perp') - \frac{2\Omega'}{\sin \Omega' T} \tilde{r}_\perp' e^{-\Omega T/2} r_\perp' \right) \quad \dots(1.27)$$

หรืออาจใช้สมการ(1.10)และ(1.11)เพื่อให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ที่คุ้นเคยกว่าดังนี้

$$K(b,a;T) = \left( \frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega T)} \right)^{1/2} \left( \frac{m\Omega'}{2\pi i \hbar \sin(\Omega' T)} \right)$$

$$\times \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \left\{ \frac{\omega}{\sin(\omega T)} ((z_b^2 + z_a^2) \cos(\omega T) - 2z_a z_b) \right. \right.$$

$$+ \frac{\Omega' \cos(\Omega' T)}{\sin(\Omega' T)} (x_b^2 + x_a^2 + y_b^2 + y_a^2)$$

$$\left. \left. - \frac{2\Omega'}{\sin(\Omega' T)} \left( \cos \frac{\Omega T}{2} (x_a y_b - x_b y_a) - \sin \frac{\Omega T}{2} (x_a x_b + y_a y_b) \right) \right\} \right] \quad \dots(1.28)$$

การพิสูจน์ว่าคำตอบที่ได้นี้ถูกต้องสามารถกระทำได้โดยให้ลิมิตของแรงใดแรงหนึ่งหรือแรงทั้งหมดมีค่าเข้าสู่ศูนย์แล้วพิจารณาว่าลิมิตของตัวแผ่กระจายที่ได้นั้นลดรูปไปสู่รูปแบบใด จากการทดสอบด้วยวิธีการดังกล่าวปรากฏว่าตัวแผ่กระจายที่ได้ตามสมการ(1.28)นั้นถูกต้อง

### ความหนาแน่นสถานะและระดับพลังงานที่เป็นไปได้

ปริมาณที่สำคัญยิ่งอีกปริมาณหนึ่งของระบบอนุภาคใดๆ ก็คือความหนาแน่นสถานะ(density of states) ทั้งนี้เนื่องจากความหนาแน่นสถานะเกี่ยวข้องกับปริมาณทางกายภาพหลายปริมาณ อาทิ พลังงานรวม และความนำความร้อน เป็นต้น เราเริ่มต้นด้วยสมการ(1.28) หลังจากนั้นหา trace ของตัวแผ่กระจาย( $\text{Tr } K(b,a;T)$ ) ติดตามด้วยการหาผลการแปลงฟูเรียร์ของ  $\text{Tr } K(b,a;T)$  ตามสูตรมาตรฐานดังนี้(Sa-yakanit et.al,1988)

$$n(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr } K(b,a;T) e^{iET/\hbar} dT \quad \dots(1.29)$$

เมื่อ  $n(E)$  คือความหนาแน่นสถานะ เนื่องจากตัวแผ่กระจายที่ได้ในสมการ(1.28) มีคุณสมบัติ translational invariant ส่งผลให้สมการ(1.29)กลับกลายเป็น

$$n(E) = \frac{V}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr } K(0,0;T) e^{iET/\hbar} dT \quad \dots(1.30)$$

เมื่อ  $V$  เป็นปริมาตรที่อนุภาคที่ดำรงอยู่ หลังจากแทน  $K(0,0;T)$  ที่ได้ลงในสมการ(1.30)แล้วเราจะได้

$$n(E) = [\text{const.}] \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} \delta(E - E_{n_1, n_2, n_3}) \quad \dots(1.31)$$

โดยที่  $\delta$  เป็นสัญลักษณ์ของฟังก์ชันเดลต้าดิแรค และ  $E_{n_1, n_2, n_3}$  คือระดับพลังงานต่างๆที่เป็นไปได้สอดคล้องสมการ

$$E_{n_1, n_2, n_3} = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar(\Omega' + \frac{\Omega}{2}) + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar(\Omega' - \frac{\Omega}{2}) + (n_3 + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad \dots(1.32)$$

ระดับพลังงานที่ได้ตามสมการสอดคล้องกับการเกิดปรากฏการณ์ซีแมน(the Zeeman effect) กล่าวคือผลของสนามแม่เหล็กจะกำจัดการซ้อนสถานะ(degeneracy)ของพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ที่มีความถี่เชิงมุม  $\omega$  เท่ากันทุกทิศทาง

### สรุปและวิจารณ์ผลการคำนวณ

โดยการใช้วิธีอินทิเกรตตามเส้นทาง เราสามารถคำนวณตัวแผ่กระจายแม่นยำตรง(exact)ของอนุภาคอิเล็กตรอนภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็กคงที่ซึ่งมีทิศทางตามแนวแกน  $z$  นอกจากนั้นอิเล็กตรอนดังกล่าวยังอยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิกที่มีความถี่เชิงมุม  $\omega$  การคำนวณได้ผลลัพธ์แม่นยำตรงดังนี้

$$\begin{aligned} K(b,a;T) = & \left( \frac{m\omega}{2\pi\hbar \sin(\omega T)} \right)^{1/2} \left( \frac{m\Omega'}{2\pi\hbar \sin(\Omega' T)} \right) \\ & \times \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \left\{ \frac{\omega}{\sin(\omega T)} \left( (z_b^2 + z_a^2) \cos(\omega T) - 2z_a z_b \right) \right. \right. \\ & + \frac{\Omega' \cos(\Omega' T)}{\sin(\Omega' T)} (x_b^2 + x_a^2 + y_b^2 + y_a^2) \\ & \left. \left. - \frac{2\Omega'}{\sin(\Omega' T)} \left( \cos \frac{\Omega' T}{2} (x_a y_b - x_b y_a) - \sin \frac{\Omega' T}{2} (x_a x_b + y_a y_b) \right) \right\} \right] \quad \dots(1.33) \end{aligned}$$

พร้อมกันนั้นระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาคอิเล็กตรอนก็สามารถคำนวณได้เช่นกัน เราได้ระดับพลังงานที่เป็นไปได้ดังนี้

$$E_{n_1, n_2, n_3} = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar(\Omega' + \frac{\Omega}{2}) + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar(\Omega' - \frac{\Omega}{2}) + (n_3 + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad \dots(1.34)$$

เมื่อ  $n_1, n_2$  และ  $n_3 = 0, 1, 2, \dots$ , (ซึ่งผลของสนามแม่เหล็กดังกล่าวทำให้สภาพซ้อนสถานะของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์หายไป สอดคล้องเป็นอย่างดีกับปรากฏการณ์ซีแมน)

### คำขอบคุณ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศ.ดร.วิรุฬห์ สายคณิต อาจารย์ที่ปรึกษาที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ในด้านการวิจัยเกี่ยวกับเทคนิคการใช้อินทิเกรตตามเส้นทางแก่ผู้วิจัยจนสามารถใช้งานได้และขอขอบคุณมหาวิทยาลัยทักษิณที่อนุเคราะห์งบประมาณเงินรายได้ในการวิจัยในครั้งนี้

### เอกสารอ้างอิง

1. Feynman, R.P. and A.R. Hibbs. **Quantum Mechanics and Path Integrals**. Mc Graw -Hill, New York, 1965.
2. Papadopoulos, G.J. Magnetization of Harmonically Bound Charges. **Gen. Phys.**, A4 :773, 1971.
3. Pauli, W. **Ausgewählte Kapitel der Feldquantisierung (Lecture Notes)**, Zurich : ETH : 139, 1951.
4. Sa-yakanit, V., N. Choosiri and U. Robkob. Exact Propagator of a Two-dimen sional Random System. ; **Phys. Rev. B**, 37 : 10851, 1988.
5. van Vleck, J.H., **Proc. Natn. Acad. Sci**, 14 : 178, 1978.